Г.В.КОЛЕСНИК

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЭКОНОМИКУ: ПРОИЗВОДСТВО И ПОТРЕБЛЕНИЕ

Тверь 2004

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тверской государственный университет»

Кафедра системного и экономико-математического анализа

Г.В. КОЛЕСНИК

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЭКОНОМИКУ: ПРОИЗВОДСТВО И ПОТРЕБЛЕНИЕ

Практикум по дисциплине
«Математическая экономика»

Тверь 2004

УДК 330.42(075.8)
ББК У.в631я73-5
К 60

Колесник Г.В.
К60 Введение в математическую экономику: производство и потребление: Практикум по дисциплине «Математическая экономика». – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2004 – 81 с.

Изложены основные концепции теории потребительского поведения и теории фирмы. Рассматриваются задачи формирования потребительского выбора, построения функций спроса и предложения, нахождения равновесия при различных типах рыночной конкуренции.

Предназначен для подготовки и проведения практических занятий по дисциплинам "Математическая экономика" и "Математические основы моделирования экономических процессов", а также для самостоятельной работы студентов.

УДК 330.42(075.8)
ББК У.в631я73-5

КОЛЕСНИК Георгий Всеволодович

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЭКОНОМИКУ: ПРОИЗВОДСТВО И ПОТРЕБЛЕНИЕ

Практикум по дисциплине «Математическая экономика»

Редактор Л.В. Тарасова
Технический редактор Т.В. Малахова
Подписано в печать 16.06.2004. Формат 60×80 1/16. Бумага типографская № 1.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,0. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 50 экз. Заказ № 276.
Тверской государственный университет: Редакционно-издательское управление.
Адрес: 170000, г. Тверь, ул. Желябова, 33. Тел. РИУ: (0822) 42-60-63.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Экономика представляет собой совокупность взаимосвязанных процессов. Два наиболее фундаментальных из них – производство и потребление. Современные представления об этих процессах описываются в теории потребительского поведения и теории фирмы, изложению основ которых и посвящен данный практикум.

Практикум состоит из трех частей. Первая часть посвящена вопросам теории потребительского поведения. В ней рассматриваются базовые концепции формирования потребительского выбора, рыночного спроса и равновесия в экономике обмена.

Во второй части рассматриваются основы теории фирмы. В ней дается представление о задачах, решаемых фирмой, формах рыночной конкуренции, а также о понятии общего равновесия в экономике с производством.

В третьей части излагаются вопросы, связанные с отражением динамики в экономико-математических моделях, в том числе базовые сведения о динамических системах, задачах оптимального управления, а также о методе динамического программирования.

Практикум содержит большое количество примеров, иллюстрирующих применение рассматриваемых концепций при решении конкретных экономических задач, а также задания для самостоятельной работы

Практикум будет полезен преподавателям при подготовке и проведении практических занятий по дисциплинам "Математическая экономика" и "Математические основы моделирования экономических процессов", а также студентам при самостоятельной работе.

Тема 1. ТЕОРИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ

1. Потребительский выбор. Отношения предпочтения

1. Понятие бинарного отношения. Способы задания отношений

Представьте себе ситуацию: вы приходите в магазин покупать себе продукты для ужина. Или подарок к новогодним праздникам. Перед вами раскинулись прилавки, набитые самым разнообразным содержимым, и вы бродите между ними, пытаясь что-нибудь выбрать. Формально вашу задачу в этой ситуации можно представить как выбор некоторой альтернативы ω из предлагаемого вам множества допустимых альтернатив Ω. Понятно, что для осуществления этого выбора вы должны уметь каким-то образом сравнивать эти альтернативы.

Проще всего это сделать, если они различаются лишь некоторым числовым показателем, например массой или датой изготовления. В этом случае множество альтернатив изоморфно некоторому подмножеству числовой прямой и мы можем их сравнить при помощи обычных арифметических отношений.

Выбирая из разложенных по прилавкам альтернатив, мы, как правило, учитываем сразу несколько показателей, то есть множество Ω имеет более сложную структуру, чем простая числовая прямая. В этом случае правила арифметического сравнения уже не работают и приходится искать что-то новое.

Формализуем процесс сравнения альтернатив произвольной природы по аналогии со сравнением обычных числовых величин.

Определение. Пусть Ω – некоторое множество альтернатив. *Бинарным отношением* R на множестве Ω называется подмножество декартова произведения Ω самого на себя: $R \subseteq \Omega \times \Omega$.

Говорят, что x *находится в отношении* R с y, если $(x, y) \in R$ (записывается $x\,R\,y$).

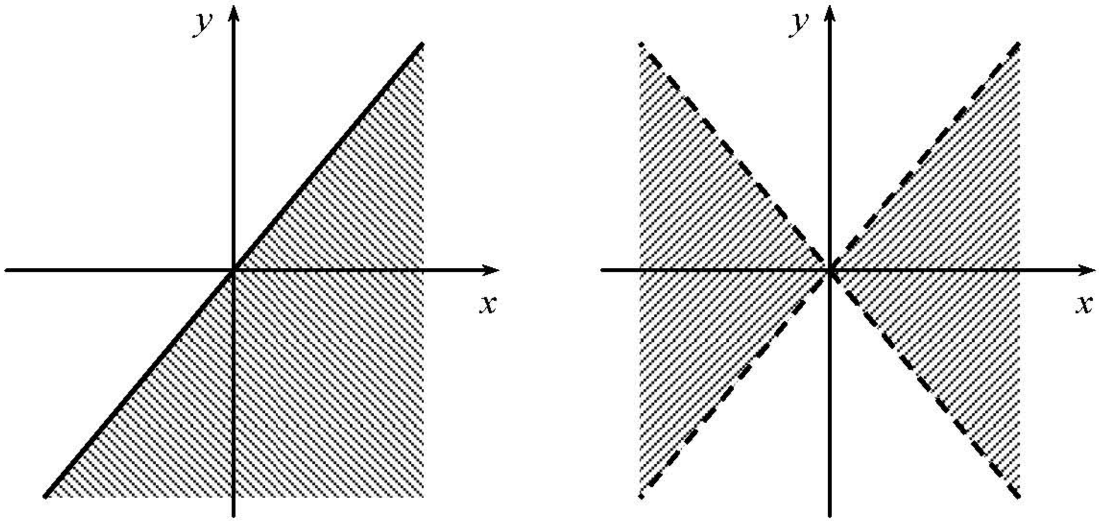
Пример 1.1. Изобразить отношения на $\mathbb{R}^1$:

(а) отношение $\geq$;

(б) отношение $\succ$, определяемое следующим образом:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^1\colon x \succ y \Leftrightarrow |\, x\,| > |\, y\,|.$$

Решение представлено на рисунке 1.



(а) *(б)*

Рис. 1

П р и м е р 1 . 2 . Множество "альтернатив" имеет следующий вид:

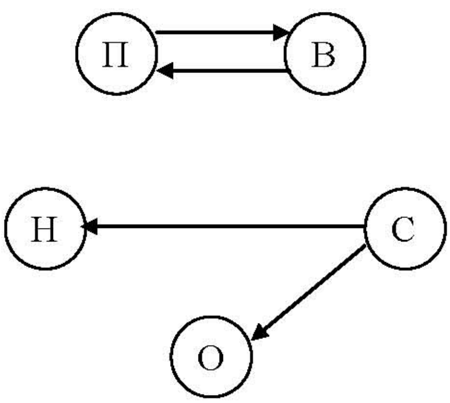
$$\Omega = \{\textit{Ваня, Петя, Оля, Наташа, Сережа}\}$$

братья **близнецы** **брат**

Изобразить отношение "быть братом" на множестве Ω.

Р е ш е н и е .

В виде графа:



То же в виде матрицы:

	В	*П*	*О*	*Н*	*С*
В	0	1	0	0	0
П	1	0	0	0	0
О	0	0	0	0	0
Н	0	0	0	0	0
С	0	0	1	1	0

Еще одним удобным способом задания отношений являются *сечения*. *Верхнее сечение* отношения R в точке x – это множество

$$R^{+}(x) = \{y \in \Omega: y\,R\,x\}.$$

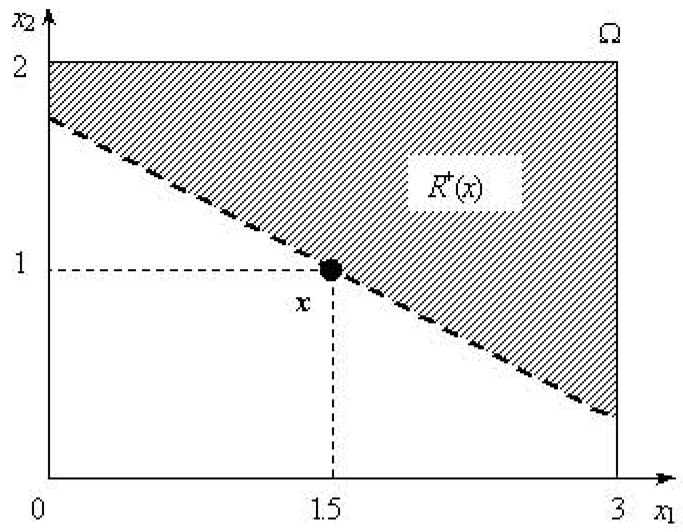


Рис. 2

Нижнее сечение отношения R в точке x

$$R^-(x) = \{y \in \Omega : x\,R\,y\}.$$

Отношение R будет полностью задано, если заданы его верхние или нижние сечения во всех точках $x \in \Omega$.

Пример 1.3. Вася ценит килограмм апельсинов так же как два килограмма яблок. В холодильнике лежит два килограмма апельсинов и три килограмма яблок. Нарисовать верхнее сечение отношения $\succ$, описывающего предпочтения Васи, для набора (1.5 кг яблок, 1 кг апельсинов).

Решение. Множество альтернатив: $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 \le 3,\ 0 \le x_2 \le 2\}$, где x_1 – вес яблок в наборе, x_2 – вес апельсинов в наборе.

Обратим внимание, что каждый элемент множества альтернатив Ω представляет собой пару чисел.

Вопрос: в пространстве какой размерности будут располагаться отношения, заданные на Ω ?

Верхним сечением отношения предпочтения в этой задаче для некоторого набора (x_1, x_2) будут те наборы (y_1, y_2), которые Вася ценит больше, чем (x_1, x_2):

$$(y_1, y_2) \succ (x_1, x_2) \Rightarrow y_1 + 2y_2 > x_1 + 2x_2.$$

Тогда для набора (1.5, 1) верхнее сечение будет выглядеть как показано на рис. 2. ♦

Укажем некоторые *свойства* отношений, которые в дальнейшем нам понадобятся.

Отношение R называется:

- *полным*, если $\forall\ x, y \in \Omega$ выполнено хотя бы одно из условий $x\,R\,y$, $y\,R\,x$.

  Полнота отношения указывает на то, что мы можем сравнить с его помощью любые альтернативы. Однако, это свойство выполняется далеко не всегда. Так, отношение ">" на $\mathbb{R}^1$ не является полным;

- *рефлексивным*, если $\forall x \in \Omega\ x\,R\,x$;
- *антирефлексивным*, если $\forall x, y \in \Omega$: $x\,R\,y \Rightarrow x \neq y$, то есть если отношение R может иметь место лишь для несовпадающих объектов.

  Например, отношения "=" и "≥" на $\mathbb{R}^1$ являются рефлексивными, а отношение ">" – антирефлексивным;

- *симметричным*, если $\forall x, y \in \Omega$: $x\,R\,y \Rightarrow yR\,x$;
- *асимметричным*, если из условий $x\,R\,y$ и $yR\,x$ по меньшей мере одно несправедливо;
- *антисимметричным*, если оба условия $x\,R\,y$ и $yR\,x$ справедливы только тогда, когда $x = y$;

  Отношение "=" на $\mathbb{R}^1$ является симметричным, отношение "≥" – антисимметричным, а отношение ">" – асимметричным;

- *транзитивным*, если $\forall\ x, y, z \in\Omega$: $x\,R\,y,\ y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$;

  Отношение "учиться в одной группе" на множестве студентов не является транзитивным, если мы допускаем, что один и тот же студент может учиться на двух факультетах сразу.

В о п р о с : Какими из перечисленных свойств обладает отношение из примера 1.2 ?

О п р е д е л е н и е . Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*.

Полное и транзитивное отношение называется *отношением слабого порядка*.

Асимметричное и транзитивное отношение называется *отношением сильного (строгого) порядка*.

Далее мы будем обозначать отношения эквивалентности значком " $\sim$ ", отношения слабого порядка – значком " $\succeq$ ", отношения строгого порядка – значком " $\succ$ ".

Пусть на множестве Ω задано отношение слабого порядка $\succeq$. Рассмотрим отношение ~, включающее в себя все пары $(x, y) \in \Omega^2$, такие, что $x \succeq y$ и $y \succeq x$. Нетрудно проверить, что ~ будет являться отношением эквивалентности. Рассмотрим также отношение $\succ$, такое, что $x \succ y$, если $x \succeq y$, но не выполнено $y \succeq x$. Из определения следует, что это будет отношение строгого порядка.

Вопрос: Как получить отношения эквивалентности и слабого порядка из отношения строгого порядка ?

Таким образом, по заданному строгому порядку можно найти соответствующий ему слабый порядок, и наоборот. Поэтому далее мы будем пользоваться только одним из этих типов отношений, подразумевая, что остальные мы можем из него получить.

Задание строгого или слабого порядка на некотором множестве порождает на нем также отношение эквивалентности. Это отношение разбивает множество на подмножества эквивалентных друг другу элементов, называемые *классами эквивалентности*:

$$\Omega = \bigcup_{a \in A} E_a \text{, таких, что } \forall\, x, y \in E_a : x \sim y.$$

Задача. Доказать, что классы эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

Рассмотрим теперь ряд наиболее часто используемых отношений, которыми описываются предпочтения потребителей. При этом в качестве альтернатив нас будут интересовать, как правило, наборы товаров. Естественно представлять их, как мы это сделали в примере 1.3, в виде векторов, каждая компонента которых соответствует количеству некоторого товара в наборе. Поэтому начнем рассмотрение с отношений, заданных на подмножествах $\mathbb{R}^N$.

Итак, пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$. Определим следующие отношения.

1. Векторное "больше":

$$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \forall\, i = 1,\ldots, N : x_i > y_i.$$

2. Векторное "не меньше":

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \forall\, i = 1,\ldots, N : x_i \geq y_i.$$

3. Доминирование Парето:

$$\boldsymbol{x} \succ_{\mathrm{P}} \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \forall\, i = 1,\ldots, N : x_i \geq y_i, \text{ и хотя бы одно неравенство строгое.}$$

4. "Линейное" доминирование:

$$\boldsymbol{x} \succeq_{\text{lin}} \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \Sigma x_i \geq \Sigma y_i.$$

5. "Леонтьевское" доминирование:

$$\boldsymbol{x} \succeq_{\text{L}} \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \min\{x_i\} \geq \min\{y_i\}.$$

6. Лексикографическое доминирование:

$$\boldsymbol{x} \succ_{\text{lex}} \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_1 > y_1 \text{ или } \exists\, i \in \{2,\ldots, N\}: \forall j < i: \ x_j = y_j, \text{ и } x_i > y_i.$$

2. Ядро отношения

Введение отношения на некотором множестве Ω позволяет попарно сравнивать принадлежащие ему альтернативы. А позволяет ли оно указать в каком-то смысле наилучшие или наихудшие элементы сразу во всем множестве ?

Определение. *Ядром* отношения R называется множество

$$C_R = \{x \in \Omega: \text{не } \exists\, y \in \Omega: y\, R\, x\}.$$

Это множество содержит альтернативы, такие, что нет других альтернатив "лучше" их (в терминах отношения R). Нетрудно видеть, что приведенное определение эквивалентно следующему

$$\forall x \in C_R: \ R^+(x) \subseteq \{x\}. \qquad (*)$$

Пример 1.4. Пусть $\Omega = [0,1]$. Отношение R задано следующим образом:

$$x\, R\, y \Leftrightarrow x > 2y.$$

Определить C_R .

Решение. Так как множество альтернатив – одномерное, то само отношение – подмножество R^2, поэтому его можно нарисовать.

Из рисунка 3 видно, что для любого элемента $y \in [{}^1/_2,\ 1]$ (заштриховано) не существует $x \in \Omega$, такого, что $x\, R\, y$, то есть этот отрезок и будет являться ядром нашего отношения. ♦

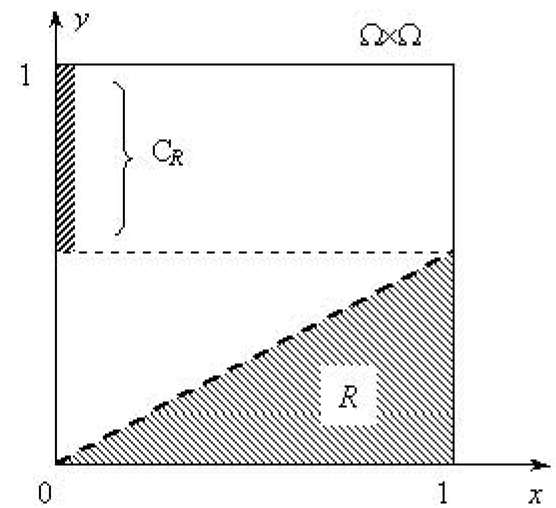


Рис. 3

П р и м е р 1 . 5 . Определить ядро предпочтений Васи из примера 1.3, если множество альтернатив имеет вид

$$\Omega = \{0 \le x_1, x_2 \le 1;\ 2x_1 + x_2 \le 3;\ x_1 + 2x_2 \le 3\}.$$

Р е ш е н и е . В отличие от предыдущей задачи нарисовать само отношение мы уже не сможем. Поэтому нарисуем Ω и воспользуемся эквивалентным определением ядра (*).

Из примера 1.3 мы знаем, как выглядят верхние сечения Васиных предпочтений. Видно, что они будут иметь непустое пересечение с Ω для всех x, не лежащих на участке границы

$$x_1 + 2x_2 = 3.$$

Поэтому только этот участок будет ядром отношения предпочтения на таком множестве альтернатив (рис. 4). ♦

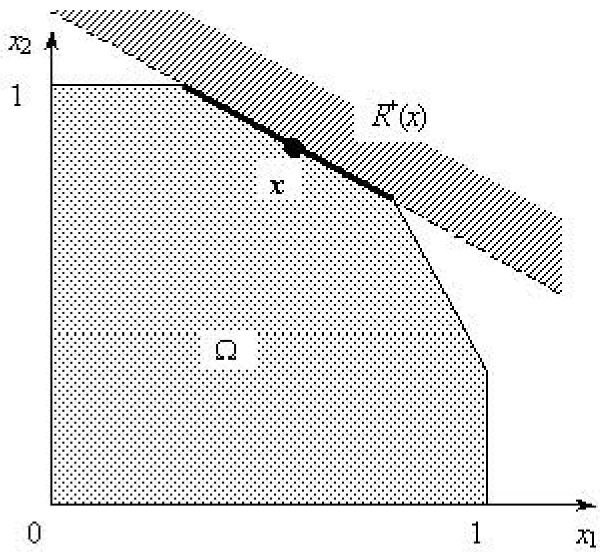


Рис. 4

З а д а ч и н а д о м

1. Можно ли, зная верхние сечения некоторого отношения R в любой точке множества Ω, определить его нижние сечения ? А наоборот ?
2. Какими свойством должна обладать матрица рефлексивного отношения ? Антирефлексивного отношения ?
3. Нарисовать верхние и нижние сечения отношений 1 – 6, если множество альтернатив $\Omega = \mathbb{R}_+^2$.
4. Часть из отношений 1 – 6 является отношениями слабого порядка, а часть – отношениями строгого порядка. Определить типы данных отношений и найти соответствующие им отношения другого типа.
5. Определить ядра отношений лексикографического доминирования, векторного "больше" и доминирования Парето на множестве альтернатив:

$$\Omega = [0,2] \times [0,1].$$

2. Функция полезности

1. Понятие функции полезности

Отношения представляют собой удобный инструмент для попарного сравнения альтернатив. Однако результаты такого сравнения не всегда могут быть записаны в аналитическом виде. В связи с этим возникает задача получения некоторой числовой характеристики на множестве альтернатив Ω, связанной с заданным отношением предпочтения. Оказывается, в некоторых случаях это можно сделать.

О п р е д е л е н и е. Пусть на Ω задано отношение предпочтения R. Функция $u(\cdot)$, такая, что $\forall\, x,\ y \in\Omega$: $x\,R\,y$ если и только если $u(x) \geq u(y)$, называется *функцией полезности*, порождаемой отношением R.

К сожалению, в общем случае функцию полезности удается построить далеко не всегда. Поэтому хотелось бы выделить семейство "хороших" отношений, допускающих построение функции полезности.

Для этого нам понадобится еще одно свойство отношений: отношение называется *замкнутым*, если его верхние и нижние сечения являются замкнутыми множествами.

У т в е р ж д е н и е. Если R является отношением слабого порядка и замкнуто, то существует функция полезности, порождаемая данным отношением.

Проверим, что все эти свойства действительно важны для существования функции полезности. Если отношение R не полное, то существует пара альтернатив $x,\ y \in \Omega$, не связанных этим отношением. Но тогда согласно определению функции полезности мы не можем сравнить значения $u(x)$ и $u(y)$, что возможно, только если $u(\cdot)$ не определена в одной из этих точек.

Для доказательства необходимости транзитивности рассмотрим отношение на множестве из трех элементов (рис. 5). Это отношение полное и замкнутое, но не транзитивное. Соответствующая ему функция полезности должна удовлетворять условиям

$$u(x) > u(y),\ u(y) > u(z),\ u(z) > u(x),$$

что невозможно. (Понятно ли, почему неравенства строгие ? Определение должно выполняться в обе стороны.)

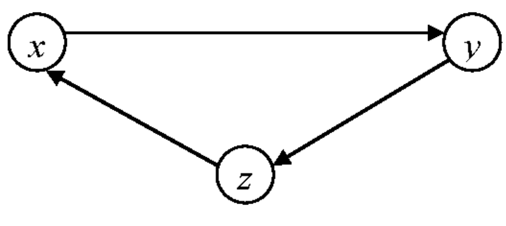


Рис. 5

Наконец, для доказательства того, что

замкнутость отношения является существенным условием, рассмотрим лексикографическое доминирование (6) на знакомом нам с прошлого занятия пространстве товаров: вектора $\boldsymbol{x} \geq 0$, каждая координата которых обозначает количество некоторого товара.

В домашней задаче 4 мы построили соответствующее ему отношение слабого порядка. Нетрудно проверить (см. домашнюю задачу 3), что сечения этого отношения не замкнуты. Предположим, что u – функция полезности, порожденная этим отношением.

Тогда для любой точки (x, y) и для любого $\varepsilon > 0$: $(x + \varepsilon, y - a) \succ_{\text{lex}} (x, y)$, и в то же время $(x, y) \succ_{\text{lex}} (x, y - a)$, откуда по определению

$$u(x + \varepsilon, y - a) > u(x, y),\ u(x, y) > u(x, y - a).$$

Тогда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u(x+\varepsilon, y-a) \geq u(x, y) > u(x, y - a)$, то есть функция $u(\cdot)$ терпит разрыв в точке $(x, y - a)$. В силу произвольности выбора x, y и a получаем, что функция u разрывна в каждой точке пространства.

Таким образом, доказано, что все перечисленные свойства отношений предпочтения необходимы для наличия функции полезности.

Теперь посмотрим на наиболее известные функции полезности, используемые при моделировании потребительского поведения.:

1. Функция Кобба – Дугласа $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$.
2. Линейная функция полезности $u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$.
3. Леонтьевская функция полезности $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$.
4. CES-функция $u(x_1, x_2) = (x_1^{\delta} + x_2^{\delta})^{1/\delta}$.

П р и м е р 2.1. Определить классы эквивалентности для отношений предпочтения, порождающих перечисленные функции полезности.

Р е ш е н и е. Отношение предпочтения $\succeq$, соответствующее функции полезности $u(x)$, может быть записано согласно определению

$$(x_1', x_2') \succeq (x_1'', x_2'') \quad \Leftrightarrow \quad u(x_1', x_2') \geq u(x_1'', x_2'').$$

Тогда класс эквивалентности представляет собой множество наборов товаров, для которых

$$u(x_1', x_2') = u(x_1'', x_2''),$$

то есть не что иное, как линия уровня функции полезности (*кривая безразличия*) $u(x_1, x_2) = \text{const}$.

Например, для функции полезности Кобба – Дугласа эта кривая имеет вид

$$x_2 = x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}. \blacklozenge$$

П р и м е р 2.2. Полезность Пети от пепси-колы и чипсов задается функцией полезности Кобба – Дугласа

$$u(x, y) = x^{0.5}y^{0.5},$$

где x – количество бутылок пепси-колы, y – количество пакетов чипсов.

Петя потребляет ежедневно 2 бутылки пепси-колы и 3 пакета чипсов. Определить максимальное количество чипсов, которое он готов обменять на одну дополнительную бутылку пепси-колы.

Р е ш е н и е. Посчитаем полезность Пети в текущем состоянии:

$$x = 2, y = 3 \Rightarrow u(2, 3) = \sqrt{6}.$$

Тогда он согласится поменять сколько-то y на дополнительную единицу x, если его полезность при этом не уменьшится. Тогда при $x' = 3$

$$u(3, y') = \sqrt{3y'} = \sqrt{6} \Rightarrow y' = 2.$$

То есть за дополнительную бутылку кока-колы Петя согласится отдать не более $y - y' = 1$ пакета чипсов.

Таким образом, при заданной функции полезности мы можем судить об относительной ценности того или иного товара для потребителя в некотором состоянии. В нашем примере относительная ценность товаров:

1 бут. кока-колы = 1 пакет чипсов. ◆

Для малых изменений в количестве товаров можно перейти к предельному эквиваленту нашей меры – *предельной норме замещения* (marginal rate of substitution, MRS):

$$MRS = -\frac{dY}{dX}\Big|_{u = \text{const}}. \qquad (1)$$

MRS показывает, какое количество товара Y согласится потребитель обменять на малое количество товара X. Однако в таком виде считать MRS неудобно. Воспользовавшись теоремой о неявной функции, получим более удобное представление

$$MRS = -\frac{dY}{dX}\Big|_{u = \text{const}} = \frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y}. \qquad (2)$$

В о п р о с : Как изменится ответ в нашей задаче, если первоначально Петя потреблял $x = 2$, $y = 2$? (В этом случае $y' = {}^4/_3$, то есть он согласится отдать $y - y' = {}^2/_3$.)

Таким образом, мы установили фундаментальный факт: *при уменьшении количества одного из товаров он становится ценнее относительно другого товара*.

Это свойство, называемое *законом убывающей предельной нормы замещения,* справедливо практически во всех регулярных случаях. Используемые в экономико-математических моделях функции полезности, за редким исключением, удовлетворяют этому закону.

П р и м е р 2 . 3 . Вычислить *MRS* для функций полезности 1 – 4.

Определим *MRS* для функции Кобба – Дугласа при помощи (1) и (2).

а) $u = \text{const} \Rightarrow x^{\alpha}y^{\beta} = c \Rightarrow y = c^{\frac{1}{\beta}} / x^{\frac{\alpha}{\beta}} = c_1 / x^{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Тогда из (1)

$$MRS = \frac{\alpha}{\beta} c_1 / x^{\frac{\alpha}{\beta}+1} = \frac{\alpha c_1 / x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta x} = \frac{\alpha y}{\beta x};$$

б) с другой стороны, из (2)

$$MRS = \frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}} = \frac{\alpha y}{\beta x}.$$

Таким образом, в случае такой функции полезности, мы согласимся обменивать товар Y на товар X пропорционально отношению имеющихся у нас количеств этих товаров.

2. Бюджетные ограничения и задача потребительского выбора

Как правило, товары, которые мы будем рассматривать в наших задачах, относятся к «благам», то есть чем больше какого-то товара мы потребляем, тем нам становится лучше. Естественно, в реальной жизни это далеко не так: различные продукты могут не приносить полезности в принципе или по достижении определенного количества.

П р и м е р ы .

1. Радиоактивные отходы.
2. Мороженное является благом при маленьких количествах, но не является – при больших (а когда мы замерзли, в принципе не является благом).

Если существует порог, такой, что дополнительное количество товара перестает увеличивать полезность, то есть $\frac{\partial u}{\partial x} \le 0$, то говорят, что достигнута точка насыщения функции полезности. Функции полезности, для которых выполнено $\forall x \ \frac{\partial u}{\partial x} \ge 0$, называют *ненасыщаемыми*.

Если считать, что потребитель максимизирует свою полезность на наборах благ, то для ненасыщаемых функций полезности мы сталкиваемся с проблемой: если не задано никаких ограничений на допустимые наборы, потребитель будет хотеть все больше и больше этих благ, так как u возрастает по своим аргументам. Однако реально это не происходит, так как помимо *желаний*, которые мы описали системой предпочтений (и, в конечном счете, функцией полезности), потребитель имеет *возможности*, которые отнюдь не бесконечны. В нашей модели возможности потребителя описываются *множеством допустимых альтернатив* (наборов), которые ограничиваются *бюджетными ограничениями*.

Бюджетные ограничения могут иметь различную природу. Один из основных их типов – ограничение по доходу: за потребление каждого товара агент должен заплатить некоторую цену, и все, что он заплатил, не должно превышать его дохода.

Рассмотрим снова пространство двух товаров X и Y. Пусть p_x – цена единицы товара X, p_y – цена единицы товара Y, I – богатство потребителя. Тогда набор товаров $\mathbf{r} = (x, y)$ будет допустимым, если

$$p_x x + p_y y \le I,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{pr} \le I,$$

где $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ – вектор цен товаров.

Если мы описали таким образом желания и возможности потребителя, то теперь мы можем сформулировать задачу, определяющую его поведение: *максимизировать функцию полезности на множестве допустимых альтернатив*. Эта задача называется *задачей потребительского выбора*.

П р и м е р 2.4. В рассмотренном нами случае единственного ограничения по доходу задача потребительского выбора формулируется в виде

$$u(x, y) \to \max,$$

$$p_x x + p_y y \le I, \quad x, y \ge 0.$$

Снова рассмотрим задачу с Петей. Предположим, что он имеет на карманные расходы $I = 20$, а цены кока-колы и чипсов соответственно $p_x = 10$, $p_y = 2.5$. Что и в каком количестве он будет потреблять ?

Р е ш е н и е. Функция Лагранжа для этой задачи:

$$L = x^{0.5}y^{0.5} + \lambda(20 - 10x - 2.5y).$$

Результат ее максимизации:

$$x^* = 1, y^* = 4.$$

Обратим внимание, что отношение цен на продукты совпадает с MRS в оптимальной точке (рис. 6). ♦

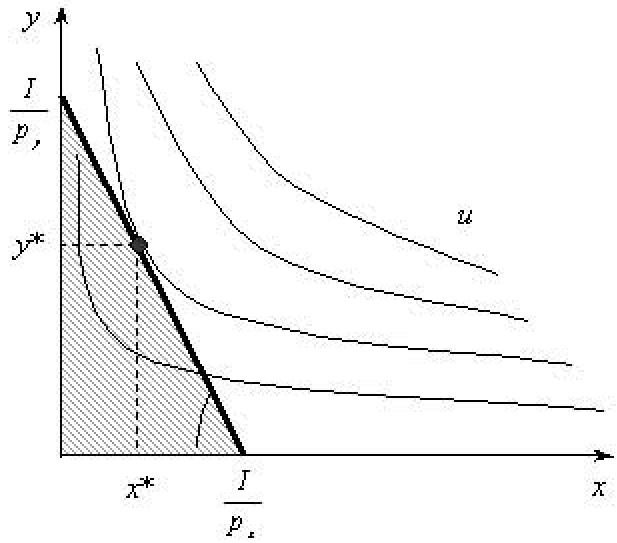


Рис. 6

З а д а ч и н а д о м

1. Вася потребляет пирожные x и мороженное y в соответствии с функцией полезности

$$u(x, y) = 20x - x^2 + 18y - y^2.$$

1) Сколько пирожных и мороженного потребит Вася, если их стоимость не имеет для него значения ?
2) После посещения врача, который рекомендовал ему сесть на диету, Вася может позволить себе потреблять не более 5 единиц пирожного и мороженного в совокупности. Сколько этих продуктов он потребит в таких условиях ?

2. Профессор Иванов сделал открытие, что он потребляет товары X и Y в соответствии с функцией полезности

$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Что и в каком количестве он будет потреблять, если $p_x = 3$, $p_y = 4$, $I = 50$? Нарисовать кривую безразличия функции полезности в окрестности точки касания бюджетного ограничения.

3. Таня, любительница спорта, играет каждую неделю g партий в гольф и t партий в теннис, и получает от этого удовольствие в количестве

$$u(g, t) = \ln g + \ln t.$$

1) Цена одной партии в местном гольф-клубе p_g = 50 у.е., а на теннисном корте p_t = 20 у.е., доход Тани I = 200 у.е.. Как она распределит свои средства ?
2) Так как Таня еще учится в ТвГУ, она может уделять занятиям спортом не более 12 часов. Как перераспределятся занятия, если партия в гольф занимает 3 часа, а партия в теннис – 2 часа ?

Изобразить бюджетные ограничения и оптимальные решения для обоих случаев.

3. Функция спроса

1. Косвенная функция полезности

Мы научились находить оптимальный выбор потребителя (x^*, y^*) при заданных значениях дохода I и цен p_x, p_y.

Если мы теперь найдем величины (x^*, y^*) для каждого набора значений (I, p_x, p_y), то получим функции $x^*(I, p_x, p_y)$, $y^*(I, p_x, p_y)$ – ***функции потребительского выбора***, которые описывают поведение потребителя при всевозможных условиях.

Подставляя полученные функции обратно в функцию полезности потребителя, мы получим максимальную полезность, которую может достичь потребитель при заданных ценах и доходе. Эта функция называется ***косвенной функцией полезности***.

П р и м е р 3 . 1 . Найти косвенную функцию полезности в задаче

$$u(x, y) = 0.3 \ln x + 0.7 \ln y,$$

$$p_x x + p_y y \le I, \quad x, y \ge 0.$$

Р е ш е н и е . Составим функцию Лагранжа

$$L = 0.3 \ln x + 0.7 \ln y + \lambda(I - p_x x - p_y y).$$

Условия оптимальности первого порядка имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{0.3}{x} - \lambda p_x = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{0.7}{y} - \lambda p_y = 0.$$

Тогда:

$$\frac{x^*}{y^*} = \frac{3p_y}{7p_x}.$$

Подставляя это равенство в бюджетное ограничение, получим

$$p_x \frac{3p_y}{7p_x} y^* + p_y y^* = \frac{10}{7} p_y y^* = I,$$

откуда найдем функции потребительского выбора:

$$y^* = 0.7 \frac{I}{p_y}, \quad x^* = 0.3 \frac{I}{p_x}.$$

Подставляя x^* и y^* в функцию полезности, окончательно получим

$$u(I, \mathbf{p}) = 0.3 \ln 0.3 \frac{I}{p_x} + 0.7 \ln 0.7 \frac{I}{p_y}. \ \blacklozenge$$

В о п р о с : Предположим, что все цены и доход потребителя возросли в a раз. Как изменится косвенная функция полезности ? Почему ?

Оказывается, никак. Изменение шкалы, в которой мы измеряем доход/цены, никак не меняет потребительского выбора и соответственно полезности этого выбора для индивида. Это свойство называется *инвариантностью* косвенной функции полезности относительно шкалы цен.

2. Функция спроса

Если зафиксировать все параметры, кроме цены данного товара, в функциях потребительского выбора $x^*(I,\ p_x,\ p_y)$, $y^*(I,\ p_x,\ p_y)$, то получим зависимость цена – объем потребления, называемую *функцией спроса*:

$$D_x(p_x) = x^*(p_x) \mid_{I,\, p_y = \text{const}}; \quad D_y(p_y) = y^*(p_y) \mid_{I,\, p_x = \text{const}}.$$

П р и м е р 3 . 2 . Построить функции спроса потребителя на товары X и Y, если его полезность задается квазилинейной функцией

$$u(x, y) = \sqrt{x} + y.$$

Р е ш е н и е . Решим задачу потребителя при произвольных ценах товаров:

$$L = \sqrt{x} + y + \lambda(I - p_x x - p_y y),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \lambda p_x = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2p_x\sqrt{x}}.$$

Функция L линейна по y, поэтому максимум достигается в точке

$$y^* = \begin{cases} 0, & 1 - \lambda p_y < 0 \\ y_c, & \textit{иначе} \end{cases},$$

где $y_c < \infty$ (так как множество альтернатив в исходной задаче ограничено). Однако линейная функция может достигать максимума на конечном значении

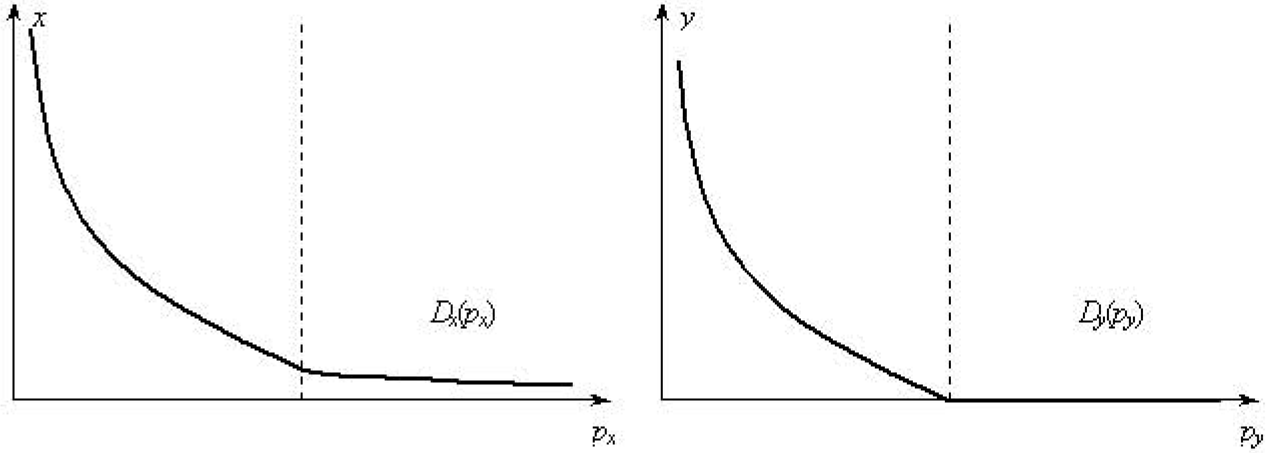


Рис. 7

только в случае, когда угловой коэффициент равен нулю, что дает еще одно условие на множитель Лагранжа λ

$$1 - p_y\lambda = 0, \text{ откуда } \lambda = \frac{1}{p_y}.$$

Тогда получаем

- при $y^* = 0$: $x^* = \dfrac{I}{p_x}$, откуда $\lambda = \dfrac{1}{2\sqrt{Ip_x}}$, и $\dfrac{p_y}{2\sqrt{Ip_x}} \geq 1$;
- при $y^* > 0$: $\dfrac{1}{p_y} = \dfrac{1}{2p_x\sqrt{x}}$, откуда $x = \left(\dfrac{p_y}{2p_x}\right)^2$.

Из бюджетного ограничения

$$p_x x + p_y y = \frac{p_y^2}{4p_x} + p_y y = I,$$

что дает

$$y^* = \frac{I}{p_y} - \frac{p_y}{4p_x}.$$

Объединяя эти два случая, окончательно получим следующие функции спроса (рис. 7):

$$D_x(p_x) = \begin{cases} \dfrac{I}{p_x}, & p_x \leq \dfrac{p_y^2}{4I} \\ \left(\dfrac{p_y}{2p_x}\right)^2, & \text{иначе} \end{cases}; \quad D_y(p_y) = \begin{cases} 0, & p_x \leq \dfrac{p_y^2}{4I} \\ \dfrac{I}{p_y} - \dfrac{p_y}{4p_x}, & \text{иначе} \end{cases}. \blacklozenge$$

3. Кривые Энгеля. Нормальные и низшие товары

Полученные нами зависимости $x^*(I,\ p_x,\ p_y)$, $y^*(I,\ p_x,\ p_y)$ позволяют анализировать и другие эффекты, например влияние изменения дохода потребителя на его выбор. Действительно, зафиксируем теперь цены (p_x, p_y) и будем менять I. Мы получим *кривые Энгеля*, позволяющие проследить соответствующие изменения x^* и y^*.

Пример 3.3. Функция полезности потребителя имеет вид

$$u(x, y) = (x + 1)\, y.$$

Как будет меняться потребление товаров X и Y с изменением его дохода?

Решение. Функция Лагранжа для данной задачи имеет вид

$$L = (x + 1)\, y + \lambda(I - p_x x - p_y y),$$

условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda p_x = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + 1 - \lambda p_y = 0,$$

откуда

$$\frac{x+1}{y} = \frac{p_y}{p_x}.$$

Тогда точка касания бюджетного ограничения и кривой безразличия имеет координаты:

$$x^0 = \frac{I}{2p_x} - \frac{1}{2},$$

$$y^0 = \frac{p_x}{p_y}\left(\frac{I}{2p_x} + \frac{1}{2}\right) = \frac{I + p_x}{2p_y}.$$

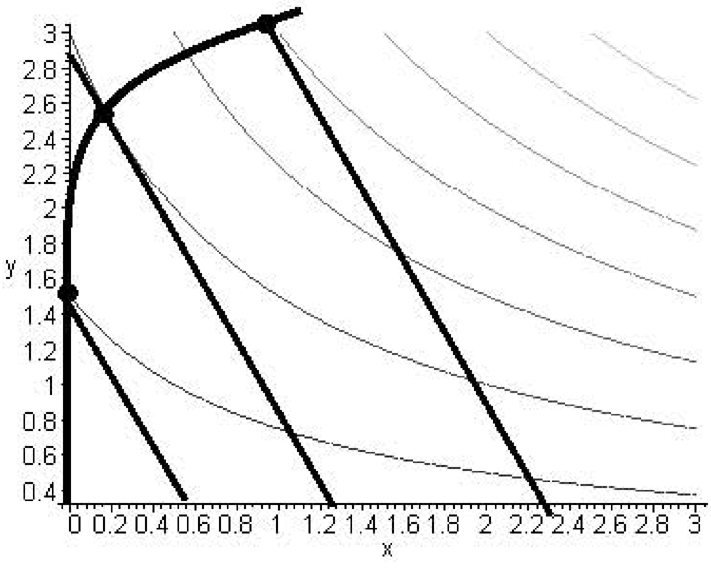


Рис. 8

Если теперь вспомнить, что мы рассматриваем неотрицательные количества потребляемых товаров, то задача будет иметь угловое решение (с $x^* = 0$) при тех параметрах, когда величина $x^0 \le 0$ (рис. 8). Тогда окончательно решение задачи потребителя имеет вид:

$$x^*(I, p_x, p_y) = \begin{cases} 0, & I \le p_x \\ \dfrac{I}{2p_x} - \dfrac{1}{2}, & \textit{иначе} \end{cases},$$

$$y^*(I, p_x, p_y) = \begin{cases} \dfrac{I}{p_y}, & I \le p_x \\ \dfrac{I + p_x}{2p_y}, & \textit{иначе} \end{cases}.$$

Видно, что при малом доходе агент совсем не потребляет товар X, все тратя на Y. И только когда доход превышает цену p_x, начинает потребляться положительное количество X.

Зафиксировав значения цен (p_x, p_y), мы получим кривые Энгеля для данной задачи (рис. 9). ◆

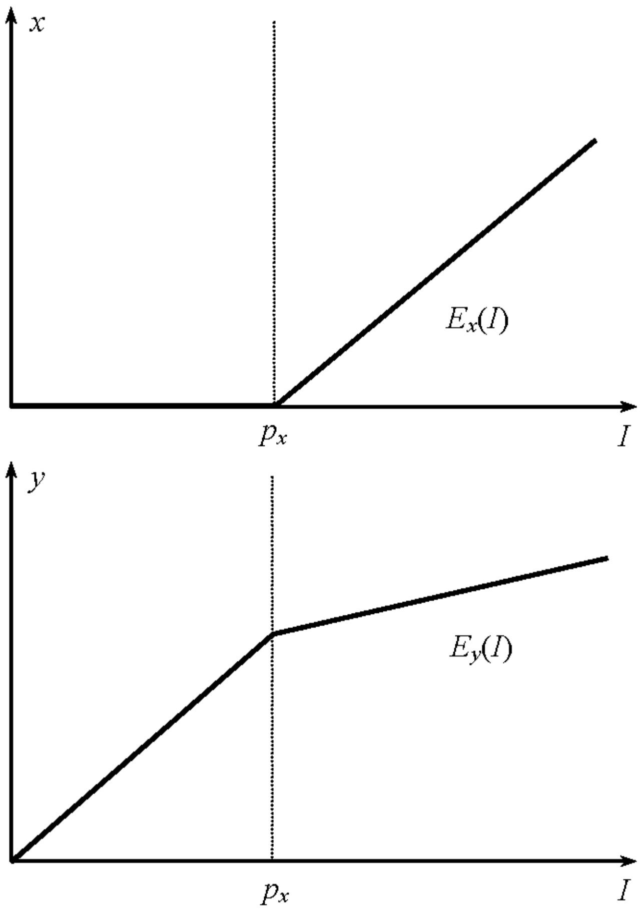


Рис. 9

Обратим внимание, что с ростом дохода потребление обоих товаров возрастает. Товары, обладающие таким свойством, называют ***нормальными***.

"Нормальность" товара означает, что более богатый потребитель будет желать большего количества этого товара. Очевидно, что это свойство выполнено далеко не для всех товаров.

Вполне может встретиться и обратная ситуация: чем богаче потребитель, тем меньше этого товара ему нужно. Такие товары называют ***низшими*** (***инфериорными***) – они важны для относительно бедных потребителей и менее важны для богатых.

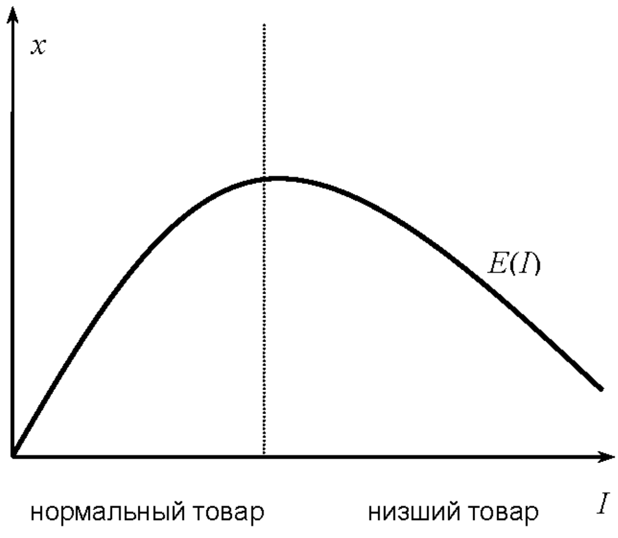


Рис. 10

В реальности, видимо, очень сложно найти чисто низшие товары. Как правило, некоторый товар

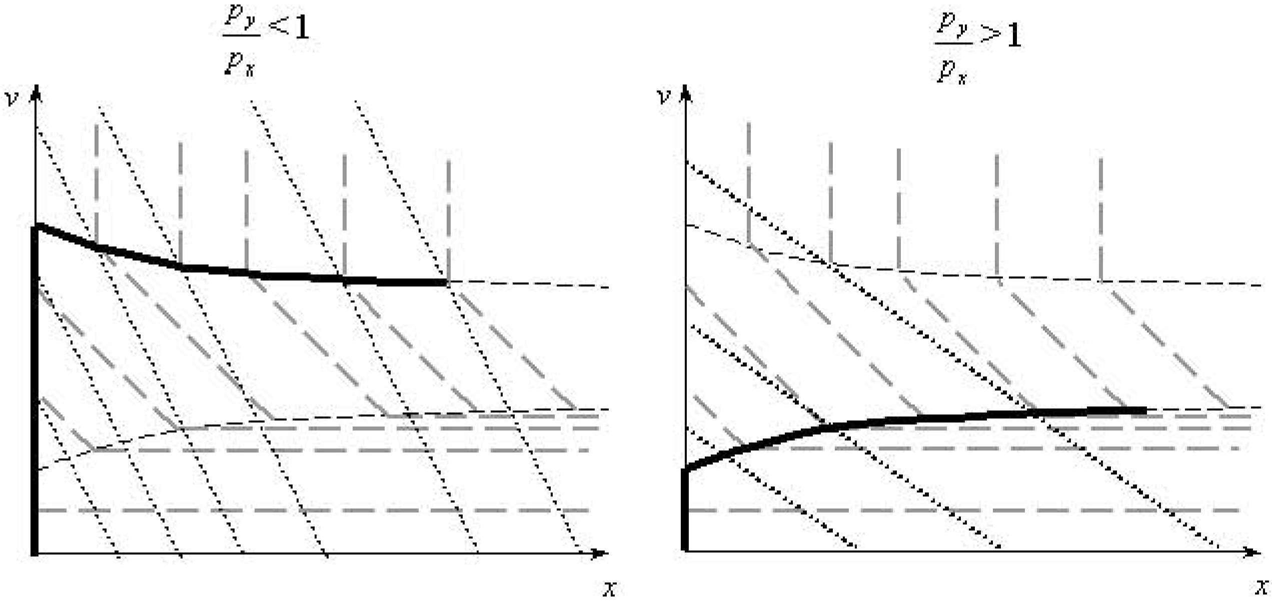


Рис. 11

может быть нормальным и низшим при различных значениях дохода (рис. 10).

Пример 3.4. Низший товар

Функция полезности потребителя имеет вид

$$U(x, y) = \begin{cases} x+3+\dfrac{1}{x+1}, & y \ge 3+\dfrac{1}{x+1} \\ y-1+\dfrac{1}{2-y}, & y \le 2-\dfrac{1}{x+1}. \\ x+y, & \text{иначе} \end{cases}$$

Как будет изменяться спрос потребителя на товар y с ростом его дохода: (а) при $\frac{p_y}{p_x} < 1$? (б) при $\frac{p_y}{p_x} > 1$?

Решение. Нарисуем кривые безразличия для нашей функции полезности и посмотрим, как будет себя вести потребительский выбор (рис. 11).

Здесь пунктирные линии – кривые безразличия функции $U(x_1, x_2)$, точечные – бюджетные ограничения при разных значениях I, жирные сплошные – кривые доход-потребление.

При маленьком доходе потребителя задача имеет угловое решение $x^* = 0$. В случае (а) оно будет при $I \in [0, \frac{4}{p_y}]$, в случае (б) – при $I \in [0, \frac{1}{p_y}]$. Далее потребительский выбор лежит в точке касания бюджетного ограничения и кривой безразличия. Для случая (а) эта точка совпадает с верхней границей областей, следовательно, x и y связаны соотношением

$$y = 3 + \frac{1}{1+x}\,. \qquad (*)$$

Из бюджетного ограничения получаем

$$p_x x + p_y\left(3 + \frac{1}{1+x}\right) = I,$$

откуда

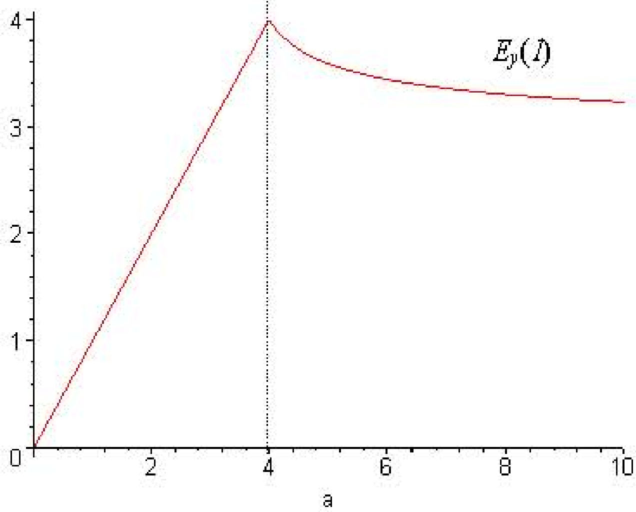


Рис. 12

$$x^* = \frac{I - 3p_y - p_x + \sqrt{(I + p_x - 3p_y)^2 - 4p_x p_y}}{2p_x}.$$

Подставляя полученное x^* в уравнение (*), получаем объем потребления товара Y

$$y^* = 3 + \frac{2p_x}{I + p_x - 3p_y + \sqrt{(I + p_x - 3p_y)^2 - 4p_x p_y}}\,.$$

Кривая Энгеля для товара Y имеет вид, показанный на рис. 12 (здесь взяты $p_x = 2$, $p_y = 1$).

Видно, что на участке $I > \dfrac{4}{p_y}$ спрос потребителя на товар Y убывает с ростом дохода, то есть, товар Y при таких уровнях дохода является низшим. ◆

З а д а ч а н а д о м. Решить пункт (б) примера 3.4. При каких уровнях дохода товар Y будет низшим в этом случае ?

4. Эффекты дохода и замещения

Функции $x^*(I, p_x, p_y)$ и $y^*(I, p_x, p_y)$ показывают, как индивидуальный выбор, максимизирующий полезность потребителя, реагирует на изменения положения бюджетного ограничения. В любом его изменении можно выделить компоненты, приводящие к перемещению потребительского выбора вдоль кривой безразличия функции полезности, и компоненты, вызывающие перемещение к новой кривой безразличия, а следовательно, изменение покупательной способности.

При этом совокупное изменение спроса будет представлять собой сумму двух эффектов: *эффекта замещения*, приводящего к изменению требуемого количества продукта при неизменном уровне полезности, и *эффекта дохода* – изменения спроса при постоянной относительной цене продукта X.

Обозначим $\frac{\partial x}{\partial p_x}|_{u\ =\ \mathrm{const}}$ изменение спроса на X, являющееся результатом изменения его цены при постоянном уровне полезности. Тогда суммарное изменение x можно записать как

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x}|_{u = \mathrm{const}} - x\ \frac{\partial x}{\partial I},$$

где первое слагаемое измеряет вклад эффекта замещения в изменение спроса, а второе – вклад эффекта дохода. Это соотношение называется *уравнением Слуцкого*.

Пример 3.5. Функция полезности потребителя имеет вид
(а) $u(x, y) = x\,y$, (б) $u(x, y) = \min\{ax, by\}$.

Определить вклад эффектов дохода и замещения в изменение спроса на товар X при изменении его цены.

Решение. (а). Решение задачи потребителя:

$$x^* = \frac{I}{2p_x},\ y^* = \frac{I}{2p_y}.$$

Тогда совокупное изменение спроса на товар X составит

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_x} = -\frac{I}{2p_x^2}.$$

Далее, изменение спроса с изменением дохода равно

$$\frac{\partial x^*}{\partial I} = \frac{1}{2p_x},$$

откуда эффект дохода составит

$$x^* \frac{\partial x^*}{\partial I} = \frac{I}{4p_x^2}.$$

Тогда можно найти вклад эффекта замещения в изменение потребительского спроса:

$$\frac{\partial x}{\partial p_x}|_{u = \mathrm{const}} = \frac{\partial x^*}{\partial p_x} + x^* \frac{\partial x^*}{\partial I} = \frac{\partial x^*}{\partial p_x} = -\frac{I}{2p_x^2} + \frac{I}{4p_x^2} = -\frac{I}{4p_x^2}.$$

Таким образом, для рассмотренной функции полезности вклады эффектов замещения и дохода в изменение спроса одинаковы (рис. 13).

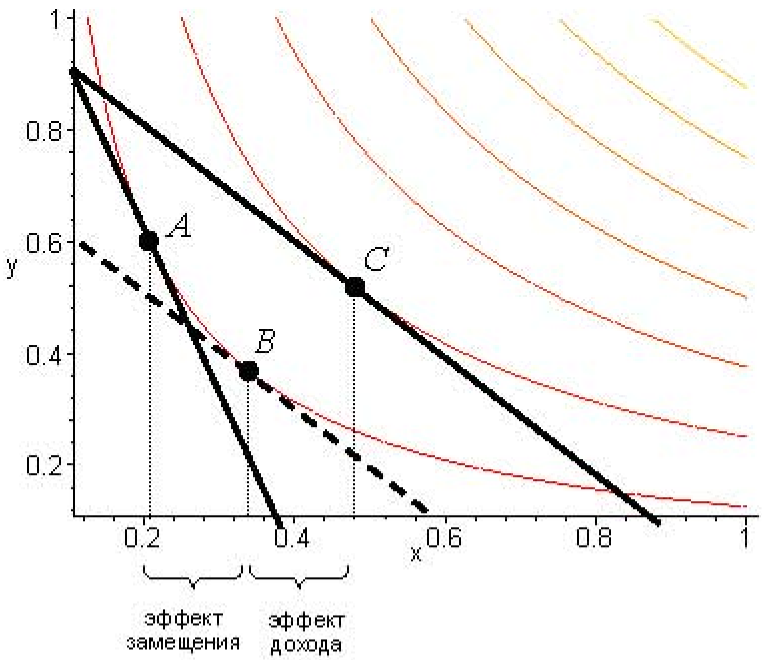


Рис. 13

(б). Сначала интуиция. Нарисуем кривые безразличия леонтьевской функции полезности и посмотрим, как должен измениться спрос на товары, чтобы компенсировать изменение их цен (рис. 14).

На рисунке 14 точечная линия представляет исходное бюджетное ограничение, пунктирная – ограничение после падения цены *X*, сплошная линия – ограничение при новых ценах, дающее потребителю ту же полезность, что и исходное (эффект замещения). Видно, что оно приводит к той же точке, то есть эффект замещения здесь нулевой, а все изменение спроса происходит за счет эффекта дохода.

Теперь формально. Для этой функции полезности в оптимальной точке $ax^* = by^*$. Подставляя это в бюджетное ограничение, получим функции потребительского выбора

$$x^* = \frac{I}{p_x + \frac{a}{b}p_y};$$

$$y^* = \frac{I}{\frac{b}{a}p_x + p_y}.$$

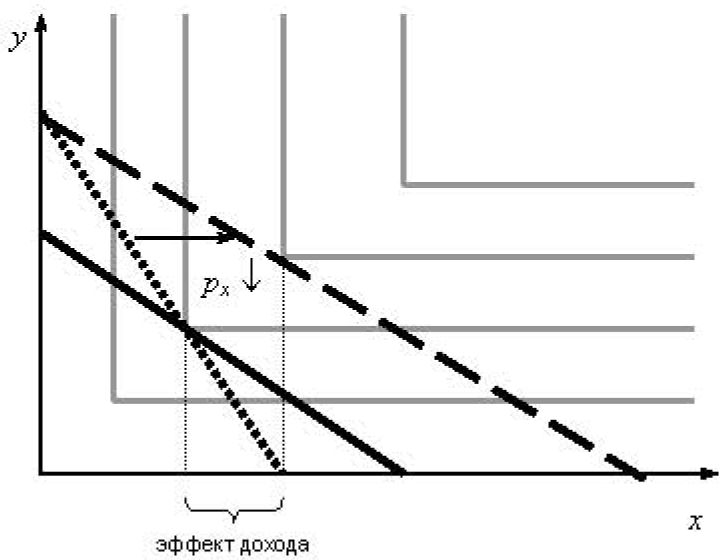


Рис. 14

Отсюда общее изменение спроса

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = -\frac{I}{(p_x + \frac{a}{b} p_y)^2},$$

эффект дохода

$$-x^* \frac{\partial x^*}{\partial I} = -\frac{x^*}{p_x + \frac{a}{b} p_y} = -\frac{I}{(p_x + \frac{a}{b} p_y)^2}.$$

Тогда из уравнения Слуцкого получаем, что эффект замещения нулевой. ◆

5. Экономика с запасами. Торговля

Рассмотрим теперь задачу потребителя при наличии у него запасов продуктов. Пусть по-прежнему в нашей системе имеется два товара, только теперь вместо некоторого фиксированного дохода потребитель располагает запасом товаров (x_0, y_0).

Если потребитель по какой-то причине желает потреблять иной, чем (x_0, y_0), набор товаров, он должен сначала продать часть имеющегося у него запаса, а затем на полученные от продажи средства приобрести недостающие продукты. Предположим для начала, что потребитель может продавать товары по тем же ценам, что и приобретать их. Тогда его бюджетное ограничение будет иметь вид

$$p_x x + p_y y \le p_x x_0 + p_y y_0,$$

или

$$p_x (x - x_0) + p_y (y - y_0) \le 0.$$

Изучим, каким образом изменится поведение потребителя при наличии такого бюджетного ограничения и, в частности, как изменится его функция спроса.

П р и м е р 3 . 6 . Функция полезности потребителя имеет вид

$$U(x,y) = x^a y^b.$$

Построить функцию спроса потребителя на товар X, если потребитель имеет начальный запас (x_0, y_0). Сравнить ее с функцией спроса для случая, когда потребитель имеет фиксированный доход $I = p_x^0 x_0 + p_y^0 y_0$.

Р е ш е н и е . Потребительский выбор в этой задаче имеет вид (при фиксированном доходе I)

$$x^* = \frac{I}{(1+\frac{b}{a})p_x}; \quad y^* = \frac{b}{a} \frac{I}{(1+\frac{b}{a})p_y}.$$

Теперь вспомним, что доход потребителя есть выручка от продажи товаров на рынке, то есть

$$I = p_x x_0 + p_y y_0.$$

Подставляя это в выражения для x^* и y^*, получим

$$x^* = \frac{p_x x_0 + p_y y_0}{(1+\frac{b}{a})p_x} = \frac{x_0}{1+\frac{b}{a}} + \frac{p_y y_0}{(1+\frac{b}{a})p_x};$$

$$y^* = \frac{p_x x_0 + p_y y_0}{(1+\frac{a}{b})p_y} = \frac{p_x x_0}{(1+\frac{a}{b})p_y} + \frac{y_0}{1+\frac{a}{b}}.$$

Зафиксируем цену товара Y:

$$p_y = p_y^{\,0}.$$

В результате изменения цены товара X бюджетное ограничение поворачивается относительно точки (x_0, y_0) (рис. 15). Набор потребительских выборов (x^*, y^*) при различных положениях бюджетного ограничения формирует кривую «потребление-предложение» (offer curve, сплошная кривая на рис. 15). В зависимости от отношения $\frac{p_y}{p_x}$ потребитель будет продавать либо приобретать товар X.

Рассмотрим случай $p_x = p_x^{\,0}$.

При этом бюджетные ограничения потребителя для случая дохода I_0 и начального запаса (x_0, y_0) будут одинаковы, следовательно, потребительские выборы будут совпадать. Тогда кривые спроса для этих двух случаев будут пересекаться в точке $(x_a, p_x^{\,0})$, где x_a – потребительский выбор при ценах $p_x^{\,0}$. При цене $p_x > p_x^{\,0}$ реальный доход индивида растет по сравнению с I_0 , поэтому в данном случае его кривая спроса будет находиться выше кривой, соответствующей фиксированному доходу.

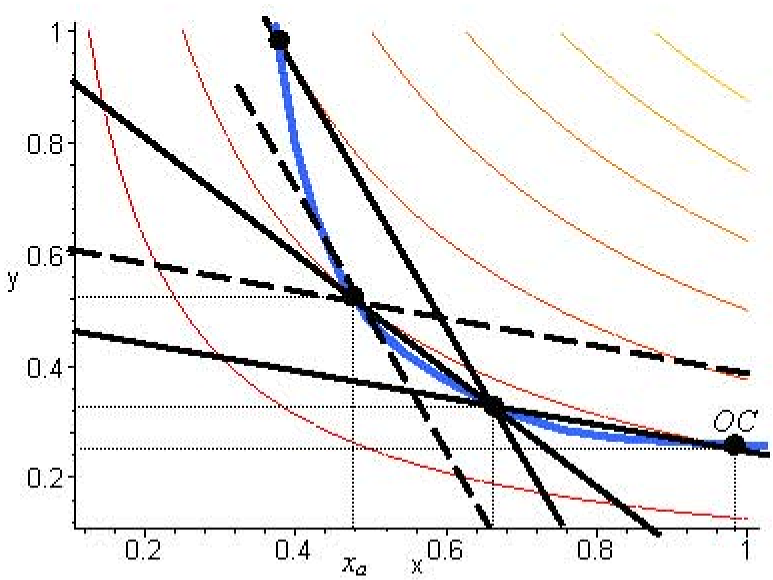


Рис. 15

Обратим внимание, что в задаче с начальным запасом индивид никогда не будет потреблять меньше $\frac{x_0}{1+\frac{b}{a}}$ товара X, тогда как потребление в задаче с фиксированным доходом стремится к 0 при $p_x \to \infty$.

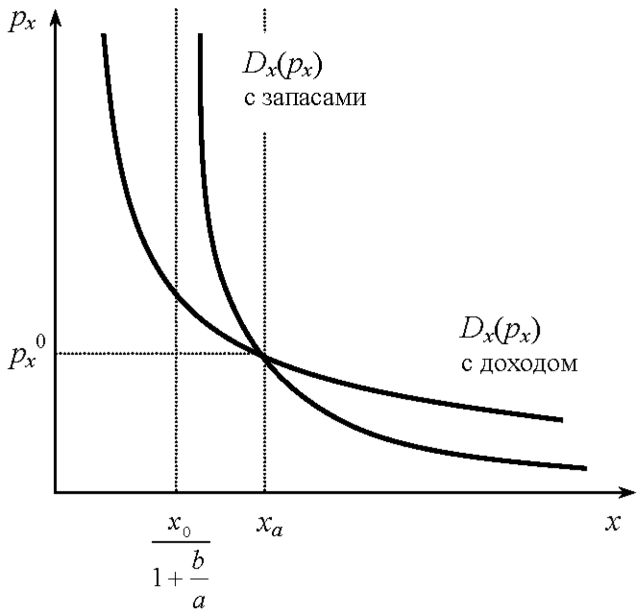


Рис. 16

При малых ценах p_x агент увеличивает потребление товара X в меньшей степени, чем в случае фиксированного дохода, так как его реальный доход падает по сравнению с I, поэтому его кривая спроса будет лежать ниже кривой для фиксированного дохода. Следовательно, соотношение кривых спроса для задач с запасом и фиксированным доходом будет таким, как приведено на рис. 16. ♦

Для задачи потребительского выбора при наличии запасов можно рассмотреть *функции избыточного спроса* на товары $ED(p)$. Для товара X эта функция будет иметь вид

$$ED_x(p_x) = D_x(p_x) - x_0.$$

Эта функция показывает, какой спрос на товар X будет предъявлять наш потребитель на внешнем рынке при наличии у него начального запаса x_0. Для рассмотренного примера функция избыточного спроса может быть получена сдвигом построенной функции спроса на величину x_0 влево.

Задача на дом. В экономике имеются 2 товара X и Y, функция полезности потребителя имеет вид

$$U(x, y) = \ln x + y.$$

Потребитель имеет начальный запас (x_0, y_0). Построить функцию избыточного спроса на товар X. Как она изменится, если увеличится x_0 ? Если увеличится y_0 ?

4. Экономика обмена

1. Торговля и эффективное распределение товаров

Рассмотрим экономику, состоящую из двух агентов, каждый из которых обладает начальным запасом продуктов $\boldsymbol{w_i} = (x_i^0, y_i^0)$.

Пусть $u_i(x_i, y_i)$ – функция полезности i-го агента. Тогда начальное благосостояние i-го агента

$$u_i^0 = u_i(x_i^0, y_i^0).$$

Основной вопрос, который нас будет интересовать, могут ли агенты увеличить свое благосостояние путем обмена товарами.

Пример 4.1. Пусть Ваня любит мармелад намного больше шоколада, а Маня любит шоколад намного больше мармелада.
Рассмотрим две ситуации:

(а) Ваня имеет 1 кг мармелада, Маня – 1 кг шоколада;

(б) Ваня имеет 1 кг шоколада, Маня – 1 кг мармелада.

Можно ли придумать обмен, повышающий благосостояние обоих ?

Решение. Очевидно, в случае (а) ситуация не может быть улучшена при помощи обмена: любой обмен приведет к тому, что агенты будут менять любимый продукт на нелюбимый, что будет уменьшать их полезности. В случае (б) мы наблюдаем совсем другую ситуацию: совершение любого обмена увеличивает полезности *обоих* агентов.

Проиллюстрируем это графически. Рассмотрим пространство двух товаров – шоколада x и мармелада y. Допустимые наборы в нашей системе ограничены суммарным запасом продуктов, имеющимся у агентов

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_M + \boldsymbol{w}_B = (1, 1).$$

Поместим Маню в начало координат и отметим точку (x_M^0, y_M^0), соответствующую ее начальному запасу. Тогда начальный запас Вани – это вектор $(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_M) = (1 - x_M^0, 1 - y_M^0)$. Он может быть представлен той же точкой на нашем рисунке, если поместить начало координат для Вани в точку $\boldsymbol{w}$ и направить оси координат в обратном направлении (рис. 17). Эта диаграмма полностью описывает состояние нашей экономики. Она называется *ящиком Эджворта*.

Начертим линии уровня функций полезности Мани и Вани (функция полезности Вани возрастает в противоположном направлении). Посмотрим на ситуацию (б) и отметим все точки, лучшие для Мани и Вани, чем начальное распределение. Видно, что, обменивая один товар на другой, они могут одновременно увеличить свое благосостояние.

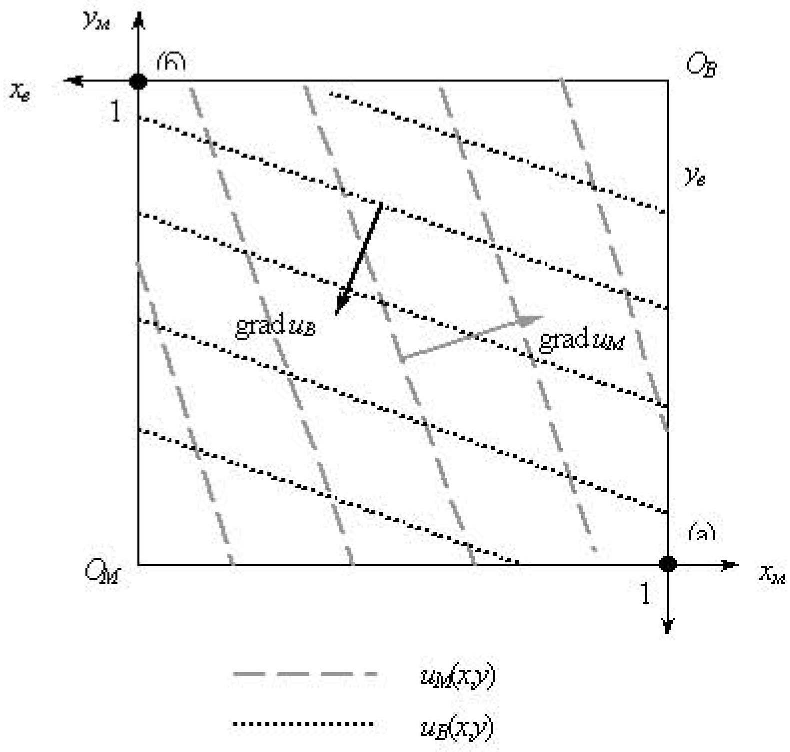


Рис. 17

З а д а ч а . Изобразить точки лучшие, чем (а), для обоих агентов.

О п р е д е л е н и е . Точка $w^* \in \Omega$ называется *эффективной* (по Парето), если не существует другой точки $w \in \Omega$, такой, что для любого агента i

$$u_i(w) \geq u_i(w^*) \qquad (*)$$

и хотя бы одно из этих неравенств строгое.

Иными словами, эффективную ситуацию нельзя улучшить ни для какого агента, не ухудшая для какого-то другого.

В нашей задаче точка (б) является неэффективной: множество точек, удовлетворяющих системе неравенств (*), для данной точки не пусто. Точка (а) в нашей задаче является эффективной.

Есть ли в этой задаче еще эффективные точки? Проверим это по определению. Пусть точка (x, y) не лежит на границе $O_M A O_B$. Тогда мы всегда можем найти точку, лежащую справа внизу от нее, например точку $(x+\varepsilon, y-\varepsilon)$ для некоторого маленького ε. Точка $(x+\varepsilon, y-\varepsilon)$ лучше, чем (x, y), для обоих агентов, поэтому (x, y) – не эффективная по определению.

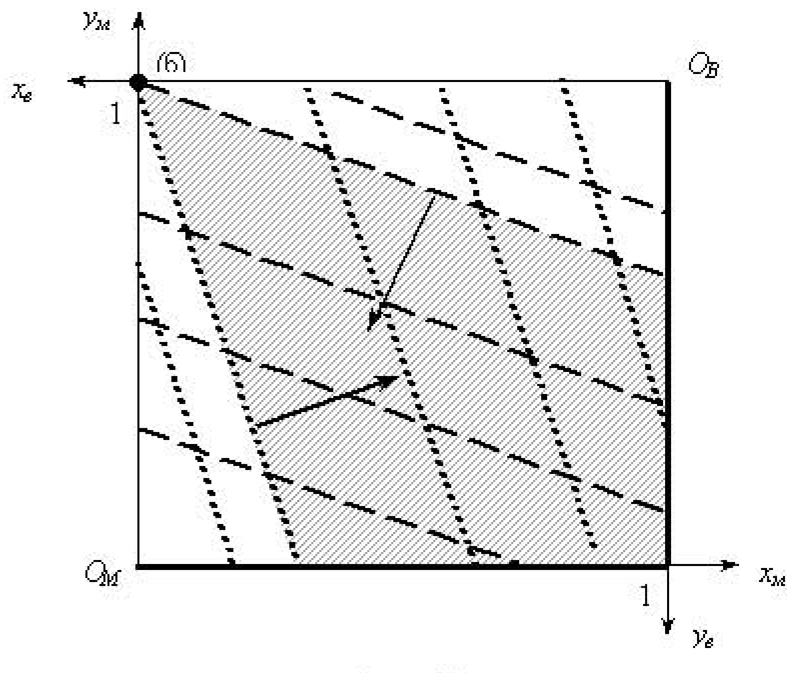


Рис. 18

В то же время для точек,

лежащих на участке $O_{м}AO_{в}$, точек, удовлетворяющих системе неравенств (*), найти нельзя, поэтому в данной задаче $O_{м}AO_{в}$ – *множество эффективных точек* (*множество Парето*).

Предположим, что начальные запасы агентов в нашей экономике образуют эффективную точку. В этом случае любой обмен, то есть любое перераспределение товаров между агентами приведет к уменьшению полезности по крайней мере одного из них, следовательно, по крайней мере один из них не согласится на обмен.

Если начальное распределение ресурсов неэффективно, то путем обмена оба агента увеличивают свое благосостояние, следовательно, торговля в этом случае возможна.

Таким образом, *в экономике обмена торговля возможна, только если начальное распределение ресурсов неэффективно*.

Как могут быть охарактеризованы эффективные распределения ? В примере (б) все эффективные точки лежали на границе множества допустимых альтернатив. Особенностью этого участка границы являлось то, что *один из продуктов был полностью сосредоточен у агента, который ценит его больше*. Для участка $O_{м}A$ это был мармелад, полностью сосредоточенный у Вани, а для участка $AO_{в}$ – шоколад, полностью сосредоточенный у Мани.

Это условие верно и для более общего случая: граничная точка является эффективной, *если у одного из агентов сосредоточен весь запас продуктов, предельная норма замещения для которых у него меньше, чем у другого*.

А может ли внутренняя точка являться эффективной ? Предположим, что в точке $\boldsymbol{w}$ агенты ценят товары X и Y по-разному, например, первый агент ценит X в терминах Y выше, чем второй, то есть

$$MRS_1(\boldsymbol{w}) > MRS_2(\boldsymbol{w}).$$

($MRS_i = -\frac{dY}{dX}|_{u_i = \text{const}}$ – предельная норма замещения товара Y товаром X для i-го агента). Если воспользоваться эквивалентной записью для предельной нормы замещения, то в точке $\boldsymbol{w}$ будет выполнено неравенство

$$\frac{\partial u_1 / \partial x}{\partial u_1 / \partial y} > \frac{\partial u_2 / \partial x}{\partial u_2 / \partial y}.$$

Рассмотрим для некоторого числа $\lambda \in (MRS_2(\boldsymbol{w}), MRS_1(\boldsymbol{w}))$ следующий обмен: второй агент меняет ε товара X на $\lambda\varepsilon$ товара Y (рис. 19). В силу того, что $\lambda > MRS_2(\boldsymbol{w})$, для малых ε благосостояние агента 2 вырастет. Аналогично, из $\lambda < MRS_1(\boldsymbol{w})$ следует, что благосостояние агента 1 при таком обмене также вырастет. Таким образом, исходная точка $\boldsymbol{w}$ не являлась эффективной.

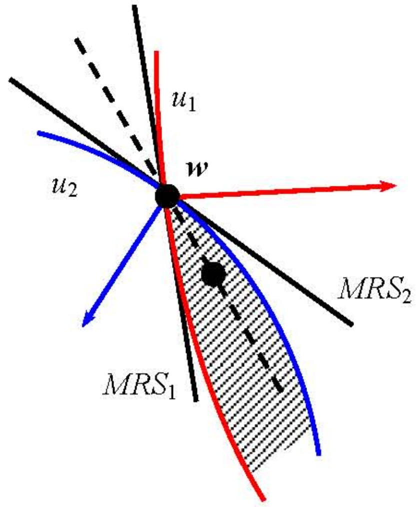


Рис. 19

В случае, когда $MRS_1(\boldsymbol{w}) = MRS_2(\boldsymbol{w})$, такого обмена совершить нельзя. Действительно, в этом случае прямая с угловым коэффициентом, равным $MRS_1(\boldsymbol{w})$, является касательной в точке $\boldsymbol{w}$ к линиям уровня функций u_1 и u_2. Тогда в предположении выпуклости множеств альтернатив, можно доказать, что они не будут иметь общих точек, то есть при любом обмене полезность хотя бы одного агента снизится.

Условие равенства предельных норм замещения может быть переписано в терминах градиентов функций полезности агентов: *во внутренней эффективной точке градиенты функций полезности направлены противоположно друг другу*

$$\operatorname{grad} u_1(x_1, y_1) = -\lambda \operatorname{grad} u_2(x_2, y_2),$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент пропорциональности (рис. 20).

З а д а ч а н а д о м 1. Доказать это, пользуясь эквивалентной записью для MRS.

П р и м е р 4.2. Агенты потребляют товары X и Y в соответствии с функциями полезности

$$u_1(x, y) = x^{2/3} y^{1/3}, \quad u_2(x, y) = x^{1/3} y^{2/3}.$$

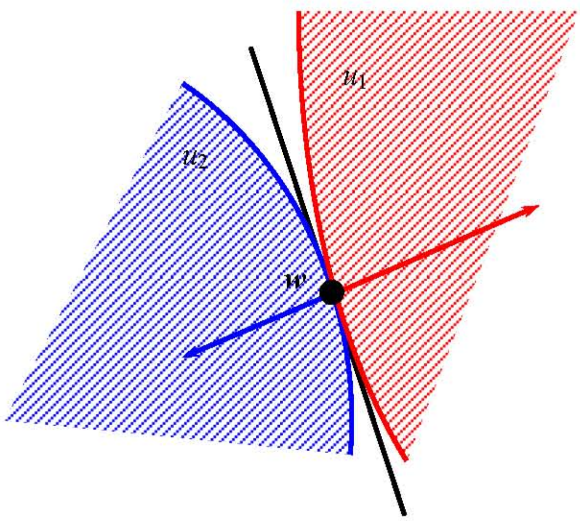


Рис. 20

Суммарный запас товаров в системе $\boldsymbol{w}^0 = (10, 10)$ (рис. 21). Определить множество эффективных распределений товаров.

Р е ш е н и е. Найдем внутренние эффективные точки, используя условие противоречия функций полезности в росте.

Рассмотрим некоторую точку $\boldsymbol{w} = (x, y)$ в системе отсчета, связанной с агентом 1. Запас агента 2 в этой точке составит

$$\boldsymbol{w}^0 - \boldsymbol{w} = (10 - x, 10 - y).$$

Условие противоречия в росте функций полезности будет иметь вид:

$$\text{grad } u_1(\boldsymbol{w}) = -\lambda \text{ grad } u_2(\boldsymbol{w}^0 - \boldsymbol{w}).$$

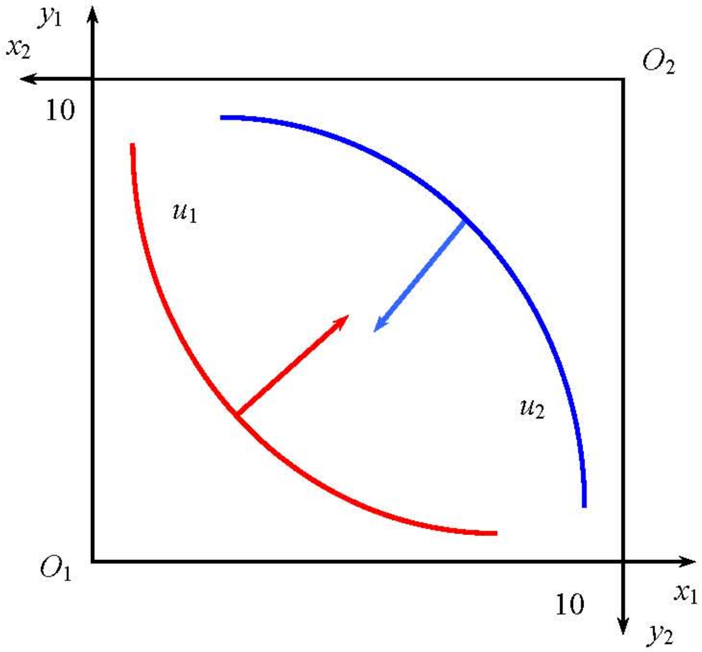


Рис. 21

Для нашего примера

$$\text{grad } u_1(\boldsymbol{w}) = (\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}, \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}),$$

$$\text{grad } u_2(\boldsymbol{w}) = (-\frac{1}{3}(10-x)^{-2/3}(10-y)^{2/3}, -\frac{2}{3}(10-x)^{1/3}(10-y)^{-1/3}),$$

откуда получаем систему уравнений

$$2x^{-1/3}y^{1/3} = \lambda(10-x)^{-2/3}(10-y)^{2/3},$$
$$x^{2/3}y^{-2/3} = 2\lambda(10-x)^{1/3}(10-y)^{-1/3}.$$

Решая эту систему, получим, что внутренние эффективные точки должны удовлетворять условию

$$y = -\frac{10}{3}(1 - \frac{40}{40-3x}).$$

Посмотрим на границу области. Заметим, что на границе полезность одного из агентов равна 0, тогда как во внутренних точках полезности обоих положительны.

Рассмотрим, например, точку X на участке границы O_1A (рис. 22). Точки из внутренности фигуры O_1XB строго лучше для агента 2 и дают $u_1 > 0$, поэтому точка X является неэф-

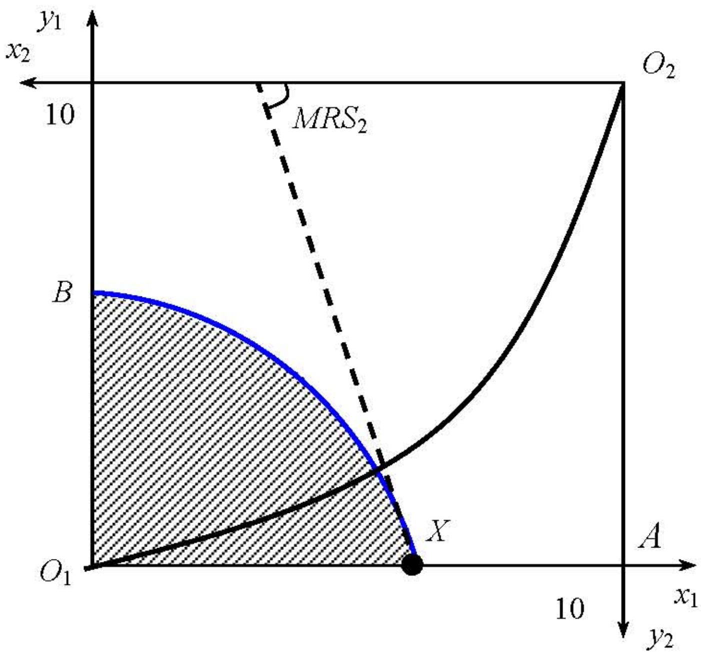


Рис. 22

фективной. Аналогично рассуждая, можно показать, что другие участки границы также не имеют эффективных точек. Таким образом, найденная нами кривая представляет собой все множество эффективных точек в нашей задаче.

Можно провести доказательство, также пользуясь рассмотренным выше условием граничной эффективной точки. В точках на участке границы O_1A весь запас товара Y содержится у агента 2. Но в этих точках $MRS_1 = 0$, а $MRS_2 > 0$, то есть условие эффективности не выполнено. ♦

2. Равновесие в экономике обмена

Итак, мы установили, что торговля в нашей системе будет происходить, если начальное распределение запасов неэффективно. Интересным представляется вопрос, к какому распределению придет экономика в результате обмена.

Очевидно, это распределение должно быть эффективным, так как в противном случае можно будет совершить еще один обмен, увеличивающий полезности агентов, затем еще один и так далее… Кроме того, это распределение должно являться решением задачи потребительского выбора *каждого агента* в нашей системе. И, наконец, спрос и предложение товаров агентами должны балансировать друг друга (для товаров с положительными ценами). Такое распределение товаров в экономике называется *равновесием*.

Аналитически отыскание равновесия представляет собой решение задач потребительского выбора агентов

$$u_i(x_i, y_i) \to \max, \quad p_x x_i + p_y y_i = p_x x_i^0 + p_y y_i^0, \quad i = 1, 2,$$

при выполнении балансов спроса и предложения на каждый товар

$$x_1 + x_2 = x_1^0 + x_2^0,$$

$$y_1 + y_2 = y_1^0 + y_2^0.$$

П р и м е р 4 . 3 . Найти равновесие в экономике из предыдущего примера, если начальный запас первого агента $\boldsymbol{w}_1 = (7, 2)$.

Р е ш е н и е . Запас второго агента $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}^0 - \boldsymbol{w}_1 = (3, 8)$.

Решения задач потребительского выбора для каждого из агентов имеют вид

- для агента 1:

$$x_1{*} = \frac{2}{3}(x_1^0 + \frac{p_y}{p_x} y_1^0), \quad y_1{*} = \frac{1}{3}(\frac{p_x}{p_y} x_1^0 + y_1^0);$$

- для агента 2:

$$x_2{*} = \frac{1}{3}(x_2^0 + \frac{p_y}{p_x} y_2^0), \quad y_2{*} = \frac{2}{3}(\frac{p_x}{p_y} x_2^0 + y_2^0).$$

Подставляя эти решения в уравнение баланса для товара X, получим

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{x_1^0 + 2x_2^0}{2y_1^0 + y_2^0}.$$

Подставляя этот результат обратно в уравнения для потребительского выбора, находим искомое распределение.

Для нашего случая

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{13}{12}, \quad x_1{*} = \frac{55}{9}, \quad y_1{*} = \frac{110}{39}, \quad x_2{*} = \frac{35}{9}, \quad y_2{*} = \frac{280}{39}.$$

Цены равновесия определяются с точностью до постоянного множителя. Например, положив $p_x = 1$, получим $p_y = \frac{13}{12}$. ◆

З а д а ч и   н а   д о м

1. Функции полезности агентов

$$u_1(x, y) = x + \ln y,$$

$$u_2(x, y) = y + \ln x.$$

   Начальный запас товаров в экономике $\boldsymbol{w}$ = (2, 1). Найти множество эффективных распределений товаров.

2. Найти равновесие в экономике из задачи 1, если начальный запас товаров у агента 1 $\boldsymbol{w}^1 = (0, 1)$.

5. Методы восстановления функции полезности.

1. Теория выявленных предпочтений

На предыдущих занятиях мы познакомились с основными подходами к анализу потребительского поведения и научились по заданной системе предпочтений потребителя (или функции полезности) прогнозировать выбираемый им набор товаров, а также исследовать влияние на потребительский выбор изменения цен на рынке и дохода самого потребителя.

Однако необходимым условием для проведения этого анализа является знание нами функции полезности, что далеко не всегда возможно. Более того, даже сам потребитель в большинстве случаев не догадывается о виде своих предпочтений, и уж тем более – об аналитической форме функции полезности. Поэтому важная задача для исследователя – выявление вида функции полезности по эмпирическим данным, то есть по наблюдениям за поведением потребителя в реальной жизни.

Пусть агент потребляет товары X и Y, и нам необходимо определить систему его предпочтений. Понаблюдаем за его поведением, фиксируя цены на рынке p_x и p_y, доход I и объем потребления (x, y).

Рассмотрим ситуацию, когда имеются два наблюдения $(p_{x0}, p_{y0}, I_0, x_0, y_0)$ и $(p_{x1}, p_{y1}, I_1, x_1, y_1)$, такие, что соответствующие им бюджетные ограничения и потребительские выборы расположены, как показано на рис. 23.

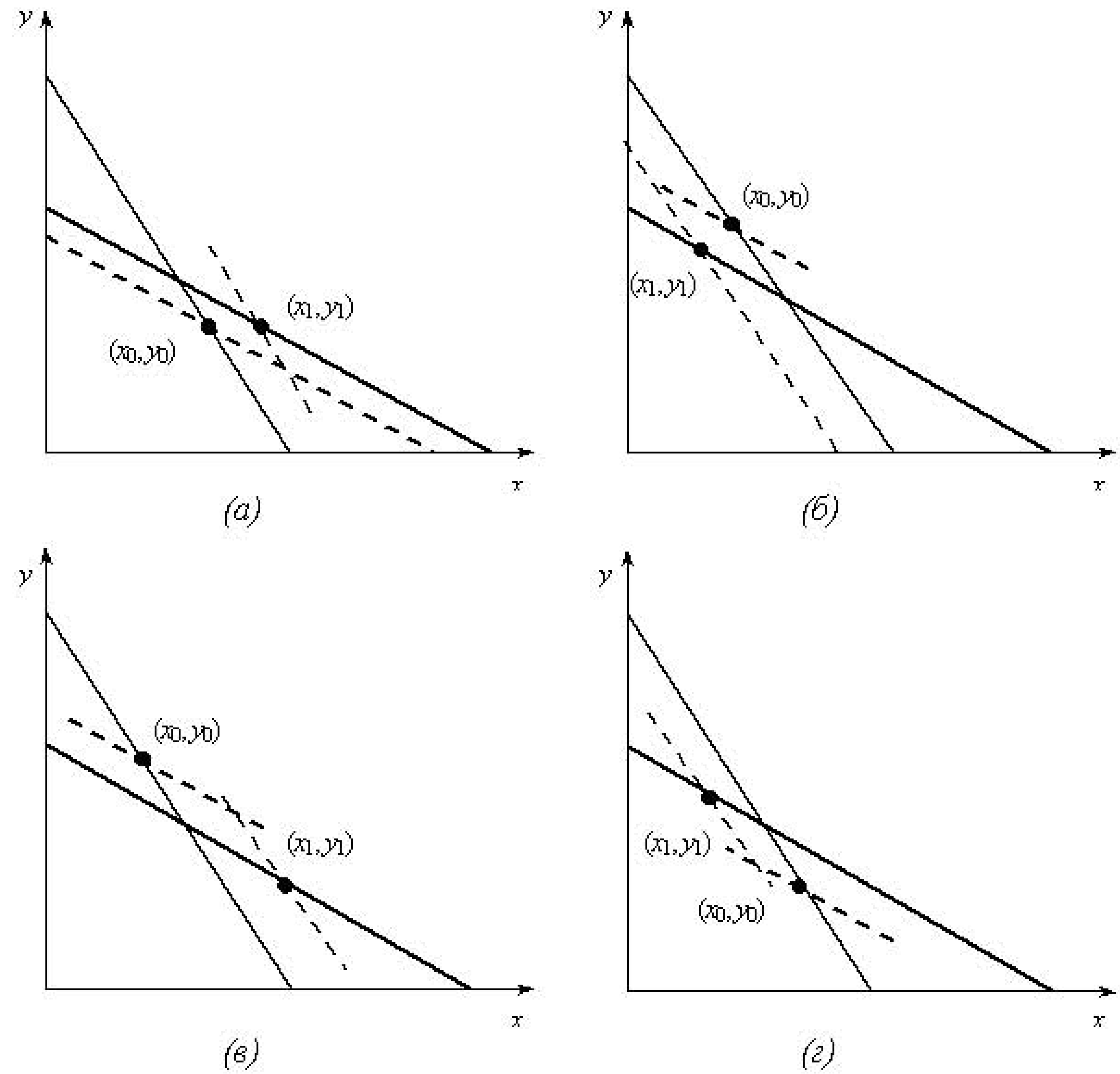


Рис. 23

Что можно сказать о предпочтениях потребителя в случаях (а) – (г) ?

(а) $(x_1, y_1) \succ (x_0, y_0)$, так как при параметрах (p_{x1}, p_{y1}, I_1) альтернатива (x_0, y_0) остается допустимой, но потребитель выбирает (x_1, y_1);

(б) $(x_0, y_0) \succ (x_1, y_1)$. Рассуждения полностью аналогичны;

(в) о предпочтениях потребителя ничего сказать нельзя, так как ни одна из альтернатив не является допустимой, когда выбирается другая;

(г) самая странная ситуация: в обоих случаях альтернативы (x_0, y_0) и (x_1, y_1) являются допустимыми, но в первом потребитель почему-то предпочел (x_0, y_0), а во втором – (x_1, y_1). Такая картинка может свидетельствовать о том, что система предпочтений потребителя каким-то образом изменилась между проведением этих наблюдений (например, в момент $t = 0$ было лето и потребитель предпочитал покупать мороженное, а в момент $t = 1$ – зима и потребителю больше нравится горячий чай). Другое объяснение – система предпочтений не поменялась, но потребитель в одном из случаев вел себя нерационально.

Аналитически данные случаи можно различить при помощи двух показателей: индексов Ласпьера и Пааше. Пусть I_1' – доход потребителя, такой, что выбор (x_0, y_0) лежит на бюджетной линии при ценах (p_{x1}, p_{y1}), а I_0' – доход потребителя, такой, что (x_1, y_1) лежит на бюджетной линии при ценах (p_{x0}, p_{y0}).

Индексом Ласпьера называется величина

$$Q_L = \frac{I_0'}{I_0}.$$

Индексом Пааше называется величина

$$Q_P = \frac{I_1}{I_1'}.$$

Тогда величины этих индексов в наших случаях будут следующими (из рис. 23):

(а) $Q_P > 1$, $Q_L > 1$. При этом в $t = 1$ благосостояние потребителя увеличилось;

(б) $Q_P < 1$, $Q_L < 1$. В $t = 1$ благосостояние потребителя снизилось;

(в) $Q_P < 1$, $Q_L > 1$. В этом случае об изменении благосостояния потребителя ничего сказать нельзя;

(г). $Q_P > 1$, $Q_L < 1$. Предпочтения потребителя изменились или он ведет себя нерационально.

Вернемся к случаю (а). Мы выяснили, что $(x_1, y_1) \succ (x_0, y_0)$. Но альтернатива (x_0, y_0) предпочитается всем, лежащим под соответствующим бюджетным ограничением. Таким образом, по двум наблюдениям мы можем сказать, что заштрихованная область Λ принадлежит нижнему сечению отношения предпочтения потребителя в точке (x_1, y_1) (рис. 24).

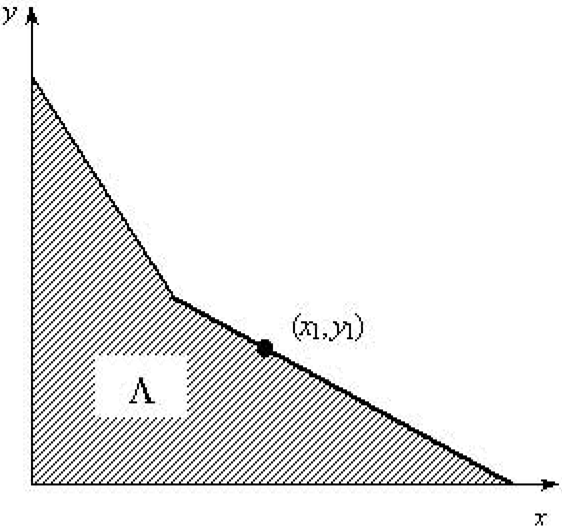


Рис. 24

Теперь предположим, что нам известно много наблюдений о поведении потребителя. Тогда мы можем более точно восстановить сечения отношения. Например, для изображенного на рис. 25 случая, можно сказать, что $A \succ B$ и $B \succ C$. Предполагая, что отношения предпочтения транзитивны, заключаем, что $A \succ C$. Тогда форма нижнего сечения отношения предпочтения может быть определена более точно (область Λ на рис. 25).

Теперь рассмотрим верхнее сечение отношения предпочтения. Прежде всего, пользуясь монотонностью предпочтений потребителя (чем больше товаров, тем ему лучше), можно сказать, что все точки, лежащие выше и правее A, принадлежат $R^+(A)$.

В о п р о с: Каким свойством должна обладать функция полезности, чтобы это не выполнялось ?

Далее, из выявленных предпочтений следует, что $D \succ A$ и $E \succ A$. Пользуясь монотонностью и транзитивностью предпочтений, можно сказать, что все точки, лежащие выше и правее D и E, также принадлежат $R^+(A)$.

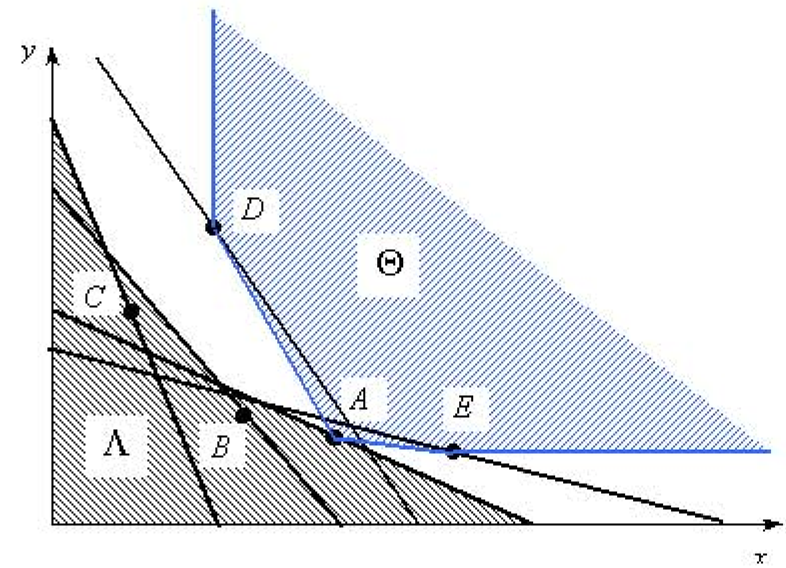


Рис. 25

Если мы предположим еще какие-то свойства отношения предпочтения, можно пойти еще дальше. Например, предположив *выпуклость* отношения предпочтения ($R^+(x)$ являются выпуклыми множествами для любого x), можем сказать, что все точки отрезков AE и DA (и все, лежащие выше и правее их) также принадлежат $R^+(A)$. Таким образом, область Θ на рис. 25 принадлежит $R^+(A)$ при достаточно слабых предположениях о предпочтениях потребителя.

Зная верхнее и нижнее сечения отношения предпочтения в точке A, мы можем сказать, что кривая безразличия, проходящая через точку A, лежит в незаштрихованной области.

Таким образом, увеличение числа наблюдений приводит к уточнению формы верхних и нижних сечений отношения предпочтения и соответственно вида кривой безразличия.

К сожалению, для точного построения кривых безразличия одной только информации, получаемой при помощи выявления предпочтений, как правило, недостаточно. Однако такая информация может дать представление о типе предпочтений потребителя. Например, в нашем случае понятно, что предпочтения не могут быть леонтьевскими (так как одна из координат точек E и D, лучших, чем A, меньше соответствующей координаты точки A, что невозможно при леонтьевских предпочтениях). Не могут они быть и линейными (попробуйте-ка нарисовать кривую безразличия линейного отношения предпочтения, проходящего через точку A). Таким образом, мы можем сказать, что рассматриваемое отношение предпочтения соответствует случаю товаров – несовершенных заменителей (наример, задаваемому функцией полезности Кобба – Дугласа или CES).

Для дальнейшего уточнения вида кривых безразличия потребителя следует использовать методы эконометрики.

2. Эконометрические методы восстановления функции полезности

Пусть теперь у нас имеются некоторые предположения о том, к какому классу относится искомая функция полезности. В этом случае ее аналитическое выражение может быть восстановлено с использованием эконометрических методов.

П р и м е р 5.1. Пусть потребление товаров X и Y задается функцией полезности Кобба – Дугласа

$$u(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}.$$

Известна следующая информация о потребительском выборе:

#	p_x	p_y	I	x^*
1	0.5	1	2	2
2	0.6	1	2	1.6
3	0.8	1	2	1.1
4	0.7	1.1	2.2	1.5

Определить коэффициенты функции полезности.

Р е ш е н и е . Нам уже известно, что для функции полезности Кобба – Дугласа функция потребительского выбора $x^*(I, p_x, p_y)$ имеет вид

$$x^*(I, p_x, p_y) = \frac{I}{p_x(1+\frac{1-\alpha}{\alpha})}.$$

Из этого уравнения можно выразить коэффициент функции полезности α:

$$\alpha = \frac{p_x x^*}{I}. \qquad (*)$$

Тогда, например, согласно первому наблюдению можно сказать, что $\alpha = 0.5$. Однако, здесь мы сталкиваемся с проблемой: другие наблюдения не подтверждают это значение коэффициента. Например, согласно второму наблюдению $\alpha = 0.48$, согласно третьему – $\alpha = 0.44$, а четвертому – $\alpha \approx 0.477$. Какое же из них правильное ?

Скорее всего, никакое. Дело в том, что теоретическая спецификация, даже корректно составленная, как правило, не отражает полностью действия всех факторов, влияющих на потребительский выбор. В результате получаемое значение коэффициента отражает не только его реальное значение, но и эффект, вызываемый изменениями неучтенных факторов, что приводит к тому, что получаемые значения коэффициентов противоречат друг другу.

Таким образом, реальные данные практически никогда не дают возможности восстановить точное значение коэффициентов в модели. Поэтому используют различные методы, позволяющие восстановить *приближенное* значение коэффициента, в некотором смысле наиболее точно отражающего реальность.

Одним из таких методов является *метод наименьших квадратов*, сущность которого заключается в следующем. Предполагается, что значения параметров наблюдаются с некоторыми отклонениями, вызванными действием ненаблюдаемых факторов или ошибками измерений. Учтем наличие этой ошибки в нашей модели: предположим, что уравнение (*) выполняется только приближенно, то есть

$$\frac{p_x x^*}{I} = \alpha + \varepsilon,$$

где ε – отклонение от предсказаний модели.

Если мы предположим, что модель является корректной, то отклонения ε от ее предсказаний должны быть достаточно малы. На этом условии основана *оценка по методу наименьших квадратов*: наиболее соответствующий реальности коэффициент минимизирует сумму квадратов отклонений предсказываемых моделью значений от наблюдаемых.

В нашем случае задача оценки коэффициента α имеет вид

$$W = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p_{xk} x_k^*}{I_k} - \alpha\right)^2 \to \min_{\alpha},$$

где k – номер наблюдения.

Это – отрицательно определенная квадратичная функция. Условия первого порядка для ее минимума

$$\frac{dW}{d\alpha} = -2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p_{xk} x_k^*}{I_k} - \alpha\right) = 2\alpha n - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{p_{xk} x_k^*}{I_k} = 0.$$

Отсюда можно получить оценку по методу наименьших квадратов коэффициента α:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{xk} x_k^*}{I_k}.$$

В данном случае оценкой коэффициента α является среднее значение выражения $\frac{p_x x^*}{I}$.

З а д а ч а н а д о м

Известно, что точки (x, y) должны располагаться на параболе, заданной уравнением

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b и c – неизвестные коэффициенты.

Имеется n наблюдений (x_1, y_1), …, (x_n, y_n), измеренных с ошибкой. Составить уравнения метода наименьших квадратов для определения коэффициентов a, b и c по данным наблюдениям.

Тема 2. ТЕОРИЯ ФИРМЫ

6. Производственные функции

1. Понятие производственной функции

Перейдем к рассмотрению следующего фундаментального экономического процесса – производства. В самом обобщенном виде этот процесс можно представить как преобразование одних продуктов – *факторов производства* – в другие продукты (или услуги) – *конечную продукцию*.

Формально это преобразование удобно представлять в виде некоторой функции, которая ставит в соответствие каждому набору факторов ($x_1, x_2, \dots, x_n$) объем получаемого из него конечного продукта q:

$$q = F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Эта функция получила название *производственной функции* (ПФ).

В качестве факторов производства мы, как правило, будем рассматривать используемый фирмой труд L и капитал K (станки, оборудование и прочее).

В большинстве задач экономики предполагается, что производственная функция удовлетворяет некоторым естественным свойствам.

1. *Неубывание*. F не убывает по каждому из своих аргументов. То есть считается, что наличие дополнительного количества некоторого фактора производства не создает помех в производстве продукции.

Определение. *Предельной производительностью* фактора x_i называется величина

$$MPX_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Эта величина показывает, на сколько изменится объем выпуска при малом изменении количества используемого фактора x_i.

Средней производительностью фактора x_i называется величина

$$APX_i = \frac{F}{x_i}.$$

2. Часто предполагается, что MPX_i – убывающая функция от x_i (*закон убывающей предельной производительности*).

Например, рассмотрим станки и рабочих. Зафиксируем количество рабочих (скажем, 1). Если рабочий работает вручную ($K = 0$), то он производит очень мало продукции. Дадим ему 1 станок. Количество производимой продукции резко вырастет – Δq будет очень велико. Если добавить ему еще один станок, то окажется, что количество производимой продукции вырастет на меньшую величину – хотя бы потому, что рабочий будет тратить часть времени, непроизводительно бегая между станками. Если продолжать добавлять станки (не изменяя числа рабочих), то приращение объема выпуска будет падать из-за того, что рабочий будет уделять все меньше внимания каждому из них. Наконец, настанет момент, когда он уже не сможет обслуживать добавляемые станки, то есть дальнейшее приращение капитала не приведет к увеличению выпуска.

Вопрос: Каким свойством должна обладать производственная функция, чтобы удовлетворять закону убывающей предельной производительности ?

Пример 6.1. Производственная функция фабрики по изготовлению мухобоек имеет вид

$$q = 600K^2L^2 - K^3L^3.$$

Определить *MPL* и *APL*. Удовлетворяет ли функция свойству неубывания ? Свойству убывающей предельной производительности ? Определить число работников, при котором они будут так сильно мешать друг другу, что выпуск начнет уменьшаться, если имеется всего один станок ($K = 1$).

Решение

$$MPL = \frac{\partial q}{\partial L} = 1200K^2L - 3K^3L^2,$$

$$APL = \frac{q}{L} = 600K^2L - K^3L^2 .$$

Эта функция не удовлетворяет ни первому ни второму свойству.

Действительно, для $K = 1$ *MPL* является возрастающей функцией на [0, 200] (рис. 26). В то же время, при $L > 400$ *MPL* становится отрицательной, что означает убывание выпуска при дальнейшем росте L. ♦

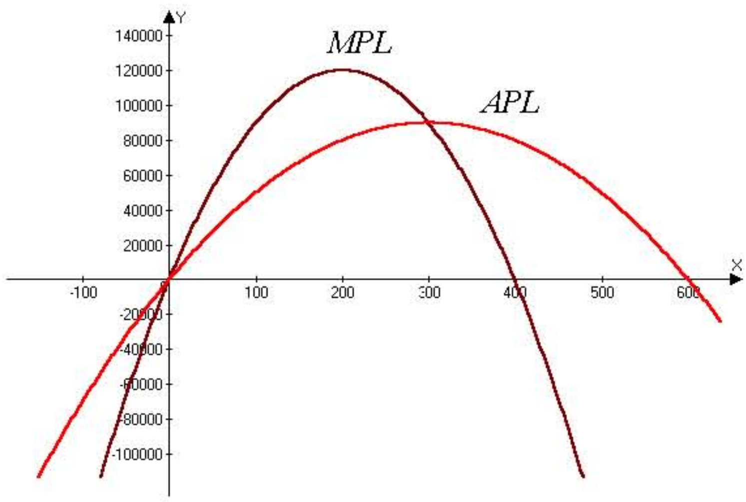


Рис. 26

При моделировании деятельности фирмы в качестве производственных функций наиболее часто используются уже знакомые нам зависимости:

1. Кобба – Дугласа $f(K, L) = K^{\alpha}L^{\beta}$.

2. Линейная $f(K, L) = \alpha K + \beta L$.

3. Леонтьевская $f(K, L) = \min\{\alpha K, \beta L\}$.

4. CES-функция $f(K, L) = (K^{\delta} + L^{\delta})^{1/\delta}$.

Как и любую функцию многих переменных, производственную функцию удобно представлять в пространстве факторов с помощью линий равного уровня – *изоквант*.

Определение. *Темпом технического замещения* (rate of technical substitution, *RTS*) называется приращение одного из факторов производства, компенсирующее малое изменение другого так, что объем выпуска остается постоянным:

$$RTS_{L,K} = -\frac{dK}{dL}\Big|_{q = \mathrm{const}}.$$

Пример 6.2. Определить $RTS_{L,K}$ для мухобоечной фабрики.

Решение

$$RTS_{L,K} = -\frac{dK}{dL}\Big|_{q = \mathrm{const}} = (\text{по теореме о неявной функции}) = \frac{MPL}{MPK} =$$

$$= \frac{1200LK^2 - 3L^2K^3}{1200L^2K - 3L^3K^2} = \frac{K}{L} = k \text{ – фондовооруженность.} \blacklozenge$$

2. Задача фирмы. Функция издержек

Производственная функция фирмы описывает только технологический процесс преобразования одних продуктов в другие, но ничего не говорит о финансовых потоках фирмы. В простейшем случае с фирмой можно ассоциировать два потока: выручку от продажи конечной продукции по цене p и затраты на приобретение факторов производства на соответствующих рынках (издержки). Эти два потока формируют *экономическую прибыль* фирмы:

$$\Pi = pq - \sum_i w_i x_i ,$$

где $q = f(x_1,\ldots,x_n)$ – объем произведенной конечной продукции, p – цена на конечную продукцию, x_i – объем i-го фактора, используемого в производстве, w_i – рыночная цена на i-й фактор.

Считается, что в условиях рынка задача фирмы состоит в *максимизации экономической прибыли*.

Как и при анализе потребительского поведения, мы будем предполагать, что цены конечной продукции и факторов заданы экзогенно, то есть фирма не может влиять на них своими решениями. Таким образом, единственными переменными, которыми фирма может распоряжаться, являются объемы используемых в производстве ресурсов x_i, выбор которых, в свою очередь, определяет объем произведенной конечной продукции q.

Рассмотрим условия первого порядка для задачи фирмы:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = p\frac{\partial f}{\partial x_i} - w_i = 0,\ i = 1,\ldots, n.$$

Пользуясь понятием предельной производительности факторов эти равенства можно переписать в виде

$$MPX_i = \frac{w_i}{p}.$$

Интуитивно они означают, что фирме выгодно использовать i-й фактор в производстве до тех пор, пока он приносит количество продукции, стоимость которого компенсирует его цену.

Теперь решим эту задачу в два этапа. Сначала предположим, что требуемый объем производства q фиксирован, и решим *задачу минимизации издержек*: при заданном требуемом объеме производства q и ценах факторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ определить их набор $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, минимизирующий суммарные затраты фирмы:

$$E(\boldsymbol{x}) = \sum_i w_i x_i \to \min, \qquad (*)$$

$$f(x_1,\ldots,x_n) = q = \text{const}.$$

Решением данной задачи являются функции спроса фирмы на факторы производства $x_i^*(q, \boldsymbol{w})$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение. ***Функцией издержек*** (total cost, TC) производителя называется оптимальное значение критерия (*) в задаче минимизации издержек:

$$TC(q, w_1, \ldots, w_n) = E(\boldsymbol{x}^*) = \sum_i w_i x_i^*(q, w_1,\ldots,w_n).$$

Функция издержек показывает зависимость затрат фирмы от объема производства и факторных цен *при оптимальном выборе объемов используемых факторов*.

Решение этой задачи позволяет выбирать оптимальное соотношение факторов, используемых в производстве, безотносительно к тому, что будет дальше происходить с произведенной продукцией.

Функция издержек играет в теории фирмы важную роль: она позволяет абстрагироваться от количественных показателей (объемов используемых факторов) и перейти сразу к финансовым показателям, характеризующим деятельность фирмы.

Издержки фирмы могут быть разделены на *постоянные* (fixed cost, FC), не зависящие от объема выпуска

$$FC = TC(q, \mathbf{w})\,|_{\,q=0}$$

и переменные (variable cost, VC), соответственно зависящие от q:

$$VC = TC - FC.$$

При анализе деятельности фирмы нас будут также интересовать различные производные показатели, связанные с функцией издержек:

- *предельные издержки* $MC = \dfrac{\partial TC}{\partial q}$;
- *средние издержки* $AC = \dfrac{TC}{q}$.

П р и м е р 6.3. Определить TC, FC, VC, MC и AC фирмы, если производственная функция имеет следующий вид.

1) $F(K, L) = 10K^{1/2}L^{1/2}$,

2) $F(K, L) = \min\{5K, 10L\}$.

Р е ш е н и е

1. Пусть цена труда – w, цена капитала – r. Задача минимизации издержек имеет вид

$$E(K, L) = wL + rK \to \min,$$

$$F(K, L) = q.$$

Функция Лагранжа для данной задачи

$$\Im = wL + rK - \lambda(\,F(K, L) - q).$$

Решим эту задачу для случая 1. Здесь все функции гладкие, следовательно, можно пользоваться условиями первого порядка:

$$\frac{\partial \Im}{\partial L} = w - \lambda(10K^{1/2}L^{-1/2}) = 0,$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial K} = r - \lambda(10K^{-1/2}L^{1/2}) = 0.$$

Отсюда получаем

$$K = \frac{w}{r} L,$$

тогда из ограничения на объем выпуска

$$K^* = \sqrt{\frac{w}{r} \frac{q}{10}}, \quad L^* = \sqrt{\frac{r}{w} \frac{q}{10}}.$$

Отсюда функция издержек фирмы

$$TC = wL^* + rK^* = \frac{q}{5}\sqrt{rw}.$$

Остальные показатели: $FC = 0$, $VC = TC, MC = AC = \frac{1}{5}\sqrt{rw}$.

2. В случае 2 мы не можем воспользоваться условиями первого порядка, так как $F(K, L)$ не является гладкой. Решим эту задачу графически. Изобразим наше ограничение и линии уровня функции $E(K, L)$ (рис. 27).

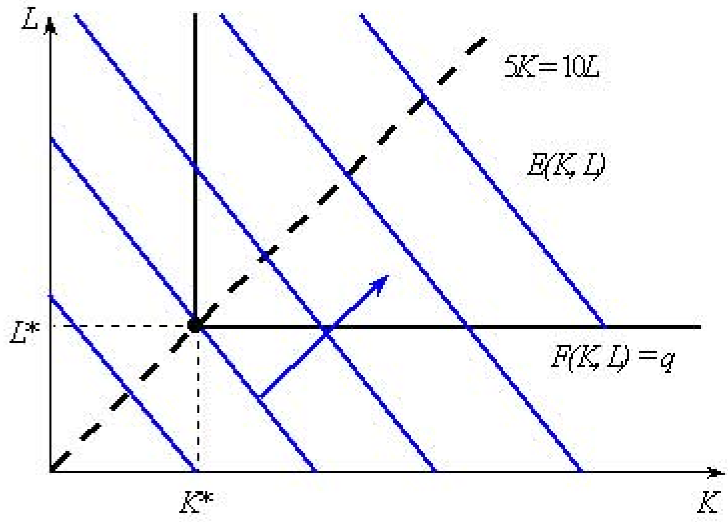


Рис. 27

Решением задачи минимизации является точка, лежащая на прямой $5K = 10L$. Тогда из ограничения можно получить

$$K^* = \frac{q}{5}, \quad L^* = \frac{q}{10},$$

откуда функция издержек

$$TC = \frac{q}{10}(2r + w).$$

Далее тривиально находятся все остальные показатели. ♦

3. Период анализа. Долгосрочные и краткосрочные функции издержек

Построенная нами функция издержек предполагает, что фирма может выбирать для производства объемы всех факторов. Однако это возможно только в том случае, когда рассматривается достаточно длительный период времени. Действительно, если труд может изменяться достаточно быстро, то для того, чтобы варьировать объем используемого капитала (например, производственных площадей), необходим длительный период.

Поэтому при анализе деятельности фирмы принято различать *кратко-*

срочный период (short-run), когда объемы некоторых из факторов фиксированы, и *долгосрочный* (long-run), когда фирма может варьировать все факторы.

Соответственно оптимальные выборы факторов в краткосрочном периоде и долгосрочном будут различными, а значит, приведут к различным функциям издержек.

П р и м е р 6.4. Определить функцию краткосрочных издержек STC, а также величины SMC, SAC, SFC и SVC для производственной функции

$$F(K, L) = 10K^{1/2}L^{1/2}.$$

Сравнить STC с полученной ранее LTC.

Р е ш е н и е. В краткосрочном периоде K – фиксирован. Тогда в задаче минимизации издержек можно варьировать только L. Из ПФ получаем

$$L = \frac{q^2}{100K}.$$

Откуда

$$STC = rK + \frac{wq^2}{100K}.$$

Тогда

$$SAC = \frac{rK}{q} + \frac{wq}{100K}, \quad SMC = \frac{wq}{50K},$$

$$SFC = rK, \quad SVC = \frac{wq^2}{100K}.$$

Полученные функции STC и LTC показаны на рис. 28. ♦

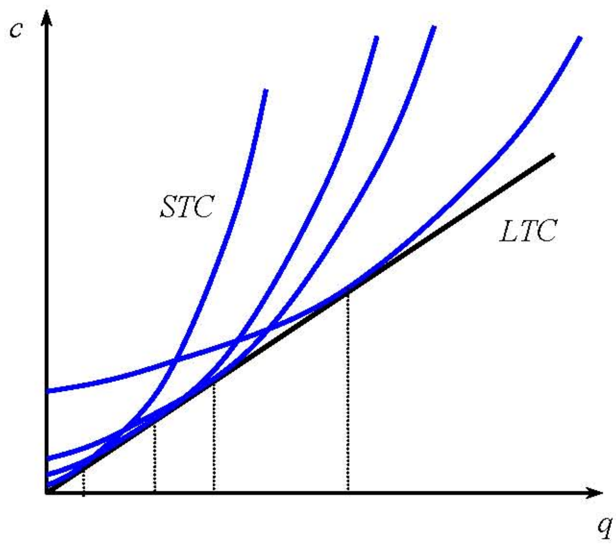


Рис. 28

З а д а ч и н а д о м

1. Посчитать MPL и APL для приведенных в п. 6.1 примеров производственных функций.
2. Доказать, что для ПФ из примера 6.4 всегда $STC \geq LTC$. Как можно интуитивно объяснить этот результат ? Найти точку, в которой краткосрочные и долгосрочные издержки совпадают.
3. Определить TC, MC, AC, FC, VC, STC, SMC, SAC, SFC, SVC для ПФ:

a) $q = (\sqrt{K} + \sqrt{L})^{2/3}$,

b) $q = KL - K^2 - L^2$.

7. Функция предложения. Рыночное равновесие

1. Формирование рыночного предложения

Решение задачи минимизации издержек фирмы – функция издержек $TC(q, \mathbf{w})$ – позволяет нам абстрагироваться от объемов используемых в производстве факторов, перейдя к финансовым показателям деятельности фирмы.

Применим полученный результат для решения задачи максимизации прибыли фирмы, которая в исходной постановке формулировалась как

$$\Pi = pq - \sum_i w_i x_i \to \max,$$

$$q = f(x_1, \ldots, x_n). \qquad (*)$$

Предположим теперь, что для любого объема выпуска фирма выбирает оптимальные количества факторов производства. Тогда, используя функцию издержек, задачу максимизации прибыли можно переписать в виде

$$\Pi = pq - TC(q, \mathbf{w}) \to \max,$$

При этом ограничение (*) уже не нужно, так как оно было учтено при построении функции издержек.

Решение данной задачи при фиксированных ценах факторов $\mathbf{w}$ представляет собой зависимость

$$q = Q(p),$$

которая называется *функцией предложения* фирмы.

Чтобы получить ее, воспользуемся условием первого порядка

$$\frac{d\Pi}{dq} = p - MC(q, \mathbf{w}) = 0.$$

Из него следует, что функция предложения продукции фирмой задается равенством

$$p = MC(q, \mathbf{w}).$$

П р и м е р 7.1. Определить функцию предложения для фирмы с ПФ

$$F(K, L) = (K^{½} + L^{½})^2.$$

Р е ш е н и е. Задача минимизации издержек имеет вид

$$E(K, L) = wL + rK \to \min,$$

$$q = (K^{½} + L^{½})^2.$$

Функция Лагранжа Для данной задачи:

$$\Im = wL + rK - \lambda((K^{1/2} + L^{1/2})^2 - q);$$

условия первого порядка:

$$\frac{\partial \Im}{\partial L} = w - \lambda(\sqrt{\frac{K}{L}} + 1) = 0,$$
$$\frac{\partial \Im}{\partial K} = r - \lambda(\sqrt{\frac{L}{K}} + 1) = 0,$$

откуда

$$L^* = \frac{qr^2}{(r+w)^2}, \quad K^* = \frac{qw^2}{(r+w)^2}.$$

Тогда функция издержек фирмы

$$TC(q, r, w) = wL^* + rK^* = \frac{qrw}{r+w}.$$

Предельные издержки

$$MC(q, r, w) = \frac{rw}{r+w},$$

следовательно, функция предложения

$$p = \frac{rw}{r+w} = \text{const}.$$

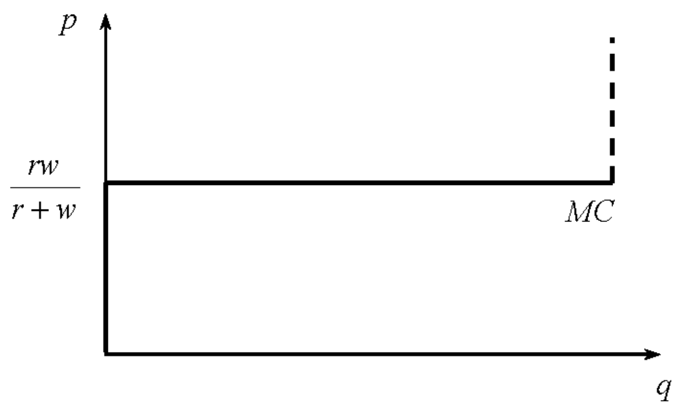


Рис. 29

В выражение для функции предложения не входит q. Это означает, что по цене $\frac{rw}{r+w}$ фирма может произвести любое количество товара. При $p < \frac{rw}{r+w}$ производство товара является невыгодным, то есть $q = 0$. При $p > \frac{rw}{r+w}$ продажа каждой дополнительной единицы товара приносит положительную прибыль, поэтому фирме выгодно производить сколь угодно большое количество товара, пока на него предъявляется спрос по цене p (рис. 29). ♦

2. Конкурентное равновесие

При исследовании задачи потребителя мы построили зависимость, характеризующую выбор объема потребления товара в зависимости от его цены, установившейся на рынке, – функцию спроса.

В предыдущем пункте была определена функция предложения, описывающая зависимость объема предлагаемой продукции от рыночных цен.

Предположим теперь, что на рынке действует большое количество потребителей и производителей, каждый из которых в отдельности не может влиять на складывающуюся на рынке цену (*условия совершенной конкуренции*). Сколько товара в этом случае будет производиться и потребляться ?

О п р е д е л е н и е . *Рыночным спросом* называется горизонтальная сумма индивидуальных кривых спроса потребителей.

Рыночным предложением называется горизонтальная сумма кривых предложения фирм.

Цена p^0, при которой рыночный спрос совпадает с рыночным предложением, называется *равновесной ценой* (или *конкурентной ценой*).

П р и м е р 7 . 2 . На рынке товара X действуют 100 одинаковых фирм с функциями издержек

$$TC = 4r + \frac{wq^2}{2}$$

и 100 одинаковых потребителей с функциями полезности

$$u(x, y) = 2x^2 y^3$$

и доходом $I = 1$.

Определить:

- кривые предложения фирм, если $w = 1$ у.е.;
- рыночную кривую предложения товара X;
- рыночную кривую спроса на товар X, если $p_y = 1$;
- равновесную цену и равновесный объем выпуска товара X.

Р е ш е н и е . Кривая предложения каждой фирмы

$$p = MC = q.$$

Кривая рыночного предложения – горизонтальная сумма 100 таких кривых:

$$Q(p) = \sum_{i=1}^{100} q_i = 100q = 100p.$$

Кривые индивидуального спроса – решения задач потребителей

$$u(x, y) = 2x^2 y^3 \to \max,$$

$$px + y = 1.$$

Функция Лагранжа:

$$\Im = 2x^2 y^3 + \lambda(1 - px - y) \to \max,$$

условия первого порядка:

$$\frac{\partial \Im}{\partial x} = 4\,x\,y^3 - \lambda p = 0,$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial y} = 6\,x^2\,y^2 - \lambda = 0,$$

откуда функции индивидуального спроса $x^* = \dfrac{2}{5p}$.

Функция рыночного спроса:

$$D(p) = \sum_{h=1}^{100} x_h^* = 100\,x^* = \frac{40}{p}.$$

Равновесная цена определяется из условия $Q(p) = D(p)$:

$$\frac{40}{p} = 100p \;\Rightarrow\; (p^*)^2 = \frac{2}{5},$$

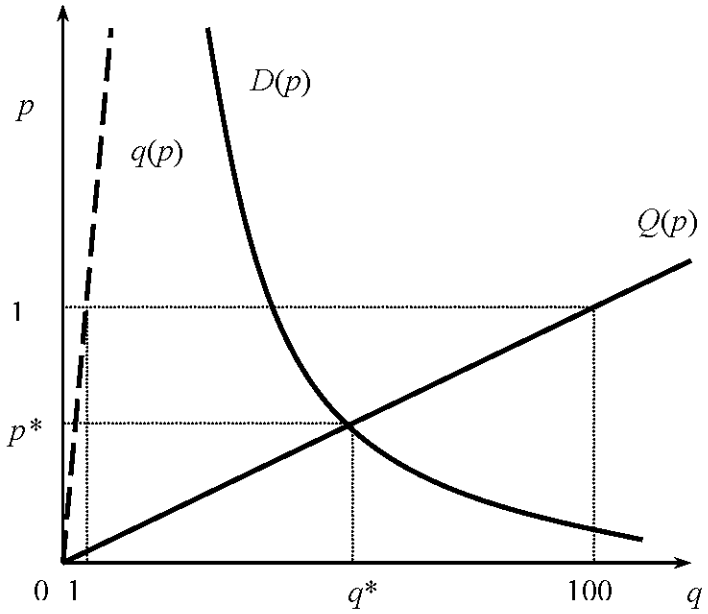


Рис. 30

откуда $p^* = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$, а равновесный объем выпуска $q^* = 100p^* = 100\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ (рис. 30). ♦

8. Несовершенная конкуренция

Условия совершенной конкуренции представляют идеальную модель поведения агентов на рынке. Однако в реальности производители часто имеют возможность влиять в той или иной степени на рыночную цену.

При этом возникает возможность получения дополнительной, по сравнению с конкурентным равновесием, прибыли.

Рассмотрим ситуации монополии (когда имеется единственный производитель, просто диктующий цену потребителям) и олигополии, когда взаимодействуют несколько крупных производителей.

1. Монополия

Предположим, что на рынке некоторого товара действует единственный производитель – монополист, который устанавливает цену на свой товар. В этом случае задача фирмы выглядит следующим образом:

$$\Pi = pq - TC(q, w) \to \max,$$

$$p = P(q) = D^{-1}(q).$$

Ограничение означает, что фирма не может продать объем товара, больший, чем рыночный спрос $D(p)$, при установленной ею цене.

Условие первого порядка для этой задачи имеет вид

$$\frac{d\Pi}{dq} = q\frac{dP}{dq} + P(q) - MC(q) = 0.$$

Величина

$$MR = q\frac{dP}{dq} + P(q)$$

называется *предельной доходностью* (marginal revenue) фирмы. Используя ее, можно переписать условие оптимальности в более компактном виде

$$MR(q^M) = MC(q^M). \qquad (*)$$

Из него может быть найден монопольный выпуск продукции q^M, а из ограничения задачи монополии – монопольная цена p^M.

Пример 8.1. Рыночный спрос на продукцию фирмы задается функцией

$$Q = a - bp,\ a, b > 0,$$

функция издержек фирмы $TC(q) = cq$, $c > 0$.

Определить цену и объем выпуска, если фирма является монополией.

Решение. Определим по заданной функции спроса предельную доходность:

$$P(q) = \frac{a-q}{b} \quad \Rightarrow \quad MR = \frac{a-2q}{b}.$$

Тогда монопольный выпуск определяется из условия (*)

$$\frac{a-2q^M}{b} = c,$$

откуда объем выпуска $q^M = \frac{a-bc}{2}$, а цена $p^M = \frac{a+bc}{2b}$ (рис. 31). ♦

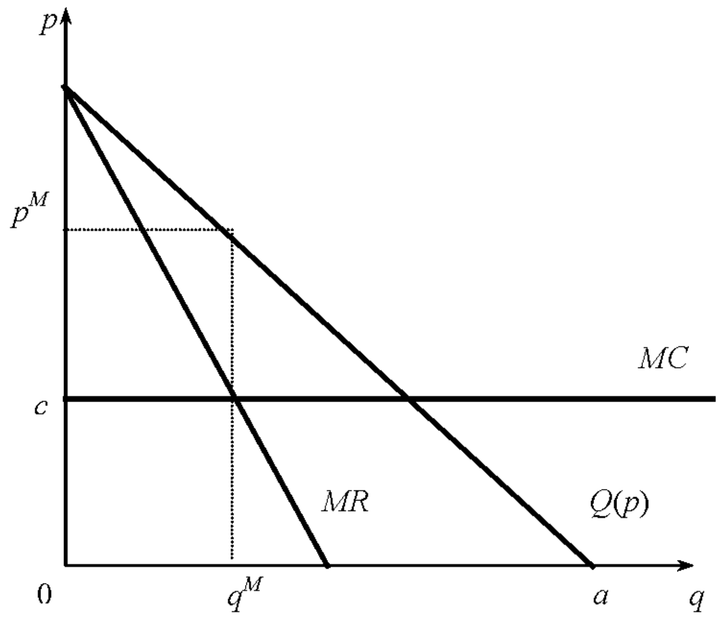


Рис. 31

2. Олигополия

Олигополией называется рынок, на котором действует небольшое количество фирм, каждая из которых может оказывать определенное влияние на рыночную цену. В этом случае рыночная цена контролируется каждой фирмой лишь частично, на нее также оказывают воздействие действия других фирм.

Олигополией Курно называется ситуация, когда фирмы назначают объемы выпуска q_i. Рассмотрим простейший случай, когда на рынке действует 2 фирмы, назначающие объемы выпуска. Обратная функция спроса $P(Q)$, определяющая рыночную цену, зависит от *совокупного объема выпуска продукции*. Учитывая условие $Q = q_1 + q_2$, получаем, что цена на рынке формируется по закону $P(Q) = P(q_1, q_2)$.

Тогда задача каждой фирмы может быть записана в виде

$$\Pi_i = P(q_1, q_2)\, q_i - TC_i(q_i) \to \max_{q_i}, \quad i = 1, 2.$$

Оптимумом в данной задаче является вектор объемов выпуска (q_1^*, q_2^*), таких, что q_i^* является решением задачи i-й фирмы, если другая фирма придерживается объема q_j^*. Такое решение называется *равновесием Нэша*.

Пример 8.2. Пусть функция спроса на продукцию фирм линейна

$$Q = a - p, a > 0,$$

а предельные издержки постоянны и равны $c > 0$ для обеих фирм.
Найти равновесие Нэша.

Решение. Обратная функция спроса имеет вид

$$P(Q) = a - Q.$$

Учитывая $Q = q_1 + q_2$, получаем:

$$P(q_1, q_2) = a - q_1 - q_2.$$

Тогда каждая фирма максимизирует величину

$$\Pi_i = (a - q_1 - q_2)\, q_i - c\, q_i \to \max.$$

Условия первого порядка для фирм:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = a - 2q_1 - q_2 - c = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = a - q_1 - 2q_2 - c = 0.$$

откуда получаем равновесие в данной системе:

$$q_1{*} = q_2{*} = \frac{a-c}{3}.$$

Тогда общее предложение $Q = \frac{2}{3}(a - c)$, цена $p = \frac{1}{3}(a + 2c)$. ◆

Другая модель олигополистического поведения фирм – *олигополия Бертрана* – описывает ситуацию, когда каждая фирма назначает цену выпускаемой продукции p_i. В этом случае фирмы, выходя на рынок, сталкиваются с различным уровнем спроса на свою продукцию. В простейшем варианте модели Бертрана предполагается, что потребители покупают весь товар у фирмы, назначающей наименьшую цену, то есть

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_1), & p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}D(p_1), & p_1 = p_2 \\ 0, & p_1 > p_2 \end{cases}, \qquad D_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0, & p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}D(p_2), & p_1 = p_2 \\ D(p_2), & p_1 > p_2 \end{cases}.$$

Здесь через $D_i(p_1, p_2)$ обозначен спрос на продукцию i-й фирмы. Нетрудно видеть, что выполнено тождество

$$D_1(p_1, p_2) + D_2(p_1, p_2) = D(\min\{p_1, p_2\}).$$

Функция прибыли фирмы в данной модели имеет вид (для фирмы 1)

$$\Pi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} p_1 D(p_1) - TC(D(p_1)), & p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2} p_1 D(p_1) - TC(\frac{1}{2}D(p_1)), & p_1 = p_2 \\ 0, & p_1 > p_2 \end{cases},$$

она максимизируется по цене, назначаемой данной фирмой.

Пример 8.3. Предположим, что в примере 8.2 фирмы назначают не объемы выпуска, а цены. Как изменится равновесие ?

Решение. В условиях примера 8.2 функция прибыли фирмы 1 имеет вид

$$\Pi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (a-p_1)(p_1-c), & p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}(a-p_1)(p_1-c), & p_1 = p_2 \\ 0, & p_1 > p_2 \end{cases}.$$

Зафиксируем p_2 и промаксимизируем данную функцию по p_1.

При $p_2 \le p^M$ на полуинтервале $[0, p_2)$ функция Π_1 возрастает по p_1, при $p_1 = p_2$ она уменьшается вдвое, а потом и вовсе обращается в 0 (рис. 32 а). При $p_2 > c$ максимума эта функция не достигает, а ε-оптимальное решение можно получить, назначив цену p_1 "чуть меньше", чем p_2: $p_1 = p_2 - \varepsilon$.

При $p_2 < c$ фирме 1 невыгодно торговать на рынке, поэтому наилучшим для нее является установить любую цену $p_1 > p_2$ и получать нулевую прибыль.

Если $p_2 = c$, фирме 1 будет безразлично, торговать ли товаром по цене p_2 или не торговать совсем – в обоих случаях она получит прибыль, равную нулю.

В случае $p_2 > p^M$ функция Π_1 достигает максимума при $p_1 = p^M$, то есть фирме 1 выгодно назначать монопольную цену, как будто второй фирмы нет вовсе (рис. 32 б).

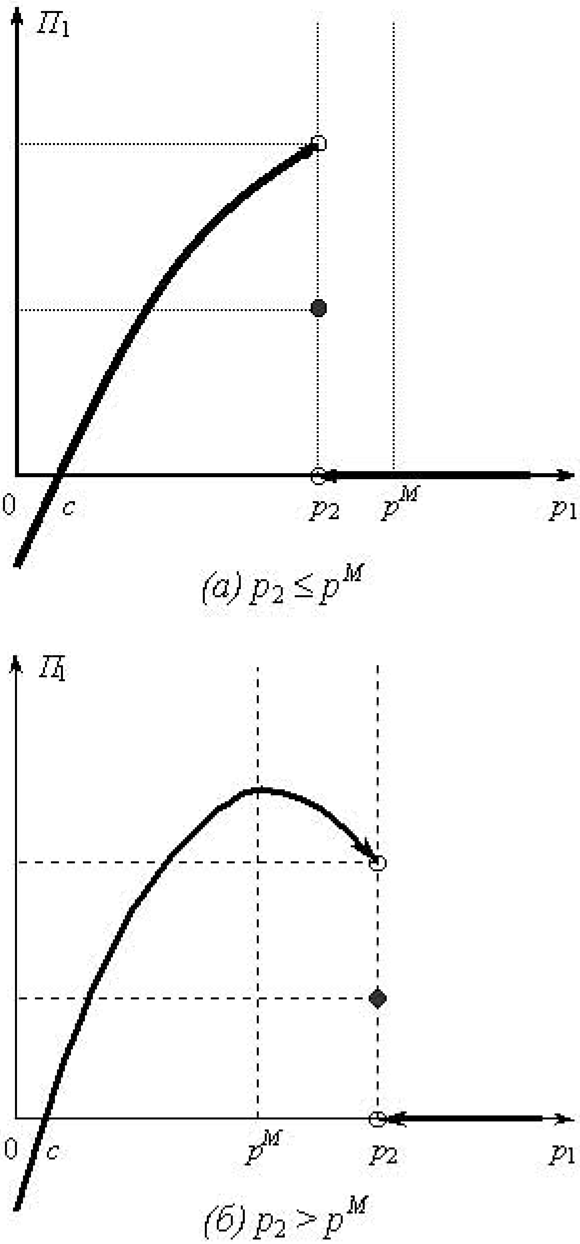


Рис. 32

Такие же рассуждения справедливы для фирмы 2. Таким образом, единственным равновесием здесь оказывается точка $p_1 = p_2 = c$! То есть несмотря на то что фирм на рынке мало, они тем не менее устанавливают цены конкурентного равновесия, в котором получают нулевую прибыль. ♦

3. Неодинаковые фирмы

Выше мы предполагали, что все фирмы в нашей экономике равноправны. Теперь предположим, что фирма 1 ("большая") пользуется большим вилянием на рынке: она выпускает основной обьем продукции, а фирма 2 ("маленькая"), воспринимая его как заданный, пытается максимизировать свою прибыль.

Тогда задачи "большой" и "маленькой" фирм будут иметь различную форму:

- "маленькая" фирма максимизирует свою прибыль при заданном q_1

$$\Pi_2 = P(q_1, q_2)\, q_2 - TC_2(q_2) \to \max_{q_2},$$

- "большая" же фирма максимизирует свою прибыль *при оптимальном поведении* "маленькой", которое зависит от q_1

$$\Pi_1 = P(q_1, q_2{}^*(q_1))\, q_1 - TC_1(q_1) \to \max_{q_1}.$$

Такое взаимодействие получило название *иерархического*, а решение задачи – *равновесия Штакельберга*.

П р и м е р 8.4. Найти равновесие Штакельберга для фирм из примера 8.2.

Р е ш е н и е. Рассмотрим задачу "маленькой" фирмы:

$$\Pi_2 = (a - q_1 - q_2)\, q_2 - c\, q_2 \to \max.$$

Ее оптимальное решение при фиксированном q_1 равно

$$q_2{}^*(q_1) = \frac{a - c - q_1}{2}.$$

Функция $q_2{}^*(q_1)$ называется еще *наилучшим ответом*, или *кривой реакции* фирмы 2.

Тогда задача "большой" фирмы запишется как

$$\Pi_1 = \frac{a - q_1 + c}{2}\, q_1 - c\, q_1 \to \max_{q_1}.$$

Решение этой задачи

$$q_1{}^* = \frac{a-c}{2}.$$

Тогда объем выпуска "маленькой" фирмы

$$q_2{}^* = q_2{}^*(q_1{}^*) = \frac{a-c}{4}.$$

Суммарный объем выпуска в системе

$$Q = q_1{}^* + q_2{}^* = \frac{3}{4}(a - c),$$

цена $p = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}c$. ◆

З а д а ч и н а д о м

1. Определить конкурентную и монопольную цены для примера 8.2 и сравнить с полученной олигополистической ценой.

2. Найти равновесия в моделях Курно и Бертрана, если функция спроса на продукцию фирм линейна, а функции издержек – квадратичные:

$$Q(p) = a - p,\ a > 0, \quad TC_i(q_i) = cq_i^2,\ c > 0.$$

3. Решить пример 8.2, если имеется три фирмы. А что будет, если есть N фирм ? Как будут меняться цена и выпуск отрасли, если $N \to \infty$?
4. Сравнить прибыли фирм в примерах 8.2 и 8.4. Кому стало лучше (хуже) ? Как это можно объяснить интуитивно ?
5. Решить иерархическую задачу для трех фирм (функции спроса и издержек такие же, как в примере 8.2), предполагая, что фирма 1 – "большая", а остальные – "маленькие". Сравнить с результатами примера 8.4 и задачи 3.

9. Общее равновесие в экономике с производством

Рассмотрим ситуацию одновременного взаимодействия потребителей и производителей на рынках нескольких товаров и факторов производства и изучим, каким образом складывается равновесие в такой системе. Модели такого рода называются *моделями общего равновесия*.

В моделях общего равновесия предполагается, что в экономике имеется множество потребителей I, множество фирм J и множество товаров N, в которое входят как потребительские товары, так и факторы производства. Предполагается, что для всех товаров в системе имеются рынки, на которых складываются цены p_k. При этом на различных рынках потребители и производители могут взаимодействовать по-разному, не обязательно в условиях совершенной конкуренции.

В начальный момент i-й потребитель имеет начальный запас товаров $\mathbf{w}^i = (w_1^i, \ldots, w_n^i)$, а также может обладать правами собственности на фирмы (например, владеть частью акций), что дает ему право получать часть прибыли фирм. Долю j-й фирмы, которой владеет i-й потребитель, будем обозначать через θ_{ij}. В этом случае суммарный располагаемый доход потребителя складывается из выручки от продажи на рынках имеющегося у него начального запаса, а также части прибыли от деятельности фирм Π_j:

$$I^i = \sum_{k=1}^{n} p_k w_k^i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} \Pi_j .$$

Тогда задача потребителя записывается следующим образом:

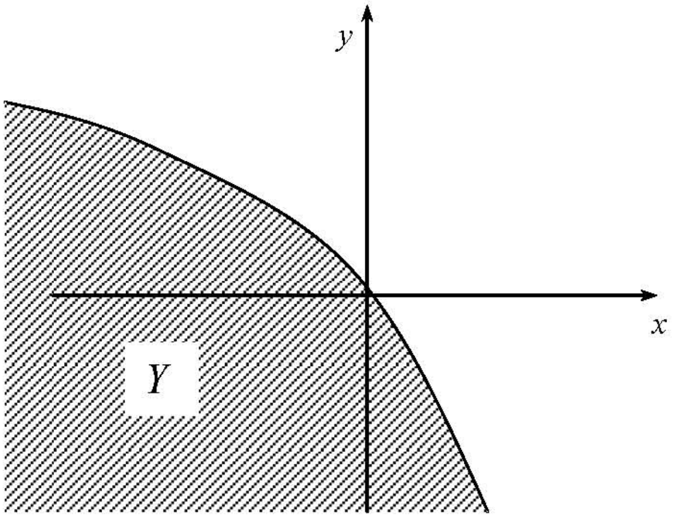


Рис. 33

$$u^i(x^i) \to \max,$$
$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^i \le \sum_{k=1}^{n} p_k w_k^i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} \Pi_j .$$

Фирмы в нашей экономике характеризуются некоторыми технологиями производства в форме *множеств производственных возможностей* $Y_j \subset \mathbb{R}^N$, содержащих все вектора товаров, которые могут быть произведены по данной технологии. При этом факторы производства представляют собой отрицательные компоненты этих векторов, а выпускаемые товары – положительные. Компоненты, соответствующие не используемым в производстве и не выпускаемым товарам, равны нулю. Пример множества производственных возможностей для двух товаров приведен на рис. 33.

Задание технологии в форме производственной функции есть частный случай множества производственных возможностей. Например, в случае двух товаров производственная функция представляет собой правый верхний участок границы множества производственных возможностей.

В нашей экономике фирмы закупают факторы производства и выпускают товары (то есть выбирают вектор $y \in Y_j$) в таких объемах, чтобы максимизировать свою прибыль Π_j при складывающихся на рынках ценах:

$$\Pi_j = \sum_{k=1}^{n} p_k y_k \to \max_{y \in Y_j} .$$

Нетрудно видеть, что для технологии в форме производственной функции эта задача совпадает с рассмотренной ранее задачей фирмы.

К какому же состоянию придет такая система ?

О п р е д е л е н и е. *Общим равновесием* в рассматриваемой системе называется набор цен $\{p_k\}_{k\in N}$, производственных выборов фирм $\{y^j\}_{j\in J}$ и объемов потребления $\{x^i\}_{i\in I}$, такой, что

1) вектора $\{x^i\}_{i\in I}$ являются решениями задачи потребителя при ценах $\{p_k\}_{k\in N}$;
2) вектора $\{y^j\}_{j\in J}$ являются решениями задачи фирмы при ценах $\{p_k\}_{k\in N}$;
3) выполняются балансы спроса и предложения на рынках всех товаров

$$\sum_{i\in I} x_k^i = \sum_{i\in I} w_k^i + \sum_{j\in J} y_k^j\,, \quad \forall\, k\in N.$$

П р и м е р 9.1. Экономика 2x2x1: два товара, два потребителя и одна фирма.

Потребители:

$$u_1(x, y) = xy;\;\; \boldsymbol{w}^1 = (1, 0);$$

$$u_2(x, y) = \min\{x, y\};\quad \boldsymbol{w}^2 = (1, 0).$$

Фирма производит товар y, используя в качестве единственного фактора товар x, технология задается производственной функцией

$$y = \sqrt{x}\,.$$

Предполагается, что фирмой целиком владеет первый потребитель ($\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$). Найти равновесие в этой системе.

Р е ш е н и е. Функции потребительского выбора:

$$x_1 = \frac{p_x + \Pi_1}{2p_x};\quad y_1 = \frac{p_x + \Pi_1}{2p_y};$$

$$x_2 = y_2 = \frac{p_x}{p_x + p_y}.$$

Задача производителя

$$\Pi_1 = p_y y - p_x y^2 \to \max_{y\ge 0}\,,$$

откуда $y^* = \dfrac{p_y}{2p_x}$, потребление фактора x: $x_y = \left(\dfrac{p_y}{2p_x}\right)^2$, прибыль $\Pi_1 = \dfrac{p_y^2}{4p_x}$.

Балансы на рынках товаров:

$$x\!: \quad x_1 + x_2 + x_y = w_1^{\,1} + w_1^{\,2},$$

$$y\!: \quad y_1 + y_2 = y^* + w_2^{\,1} + w_2^{\,2}.$$

Тогда получаем систему уравнений для равновесных цен:

$$\frac{p_x + p_y^2/4p_x}{2p_x} + \frac{p_x}{p_x + p_y} + \frac{p_y^2}{4p_x^2} = 2,$$

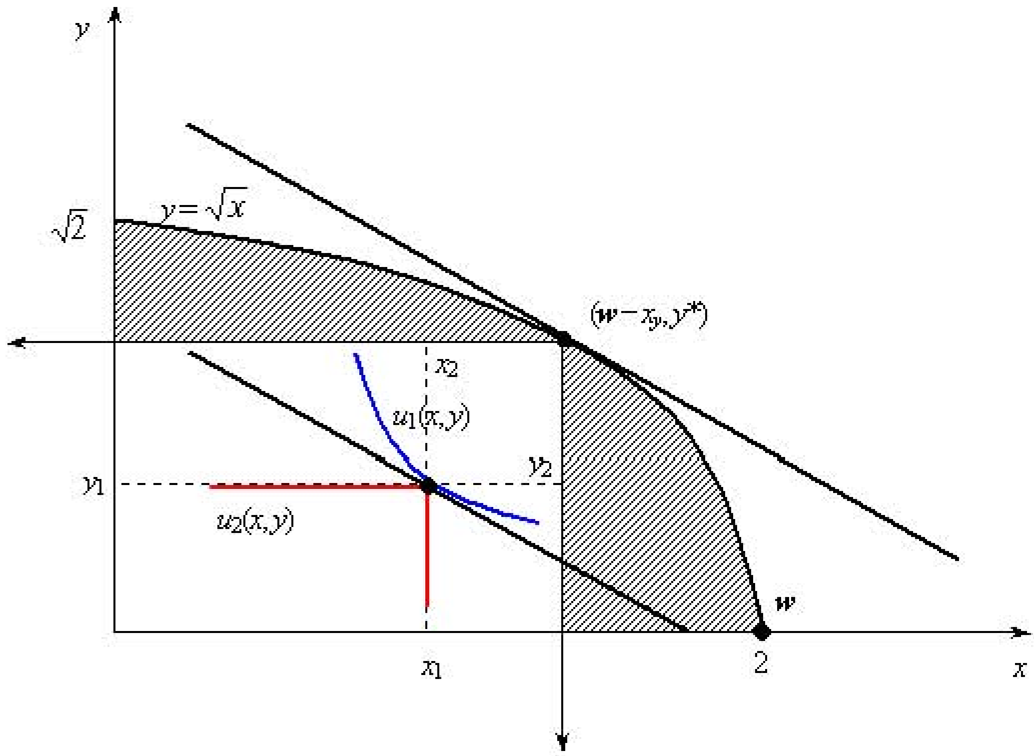


Рис. 34

$$\frac{p_x + p_y^2/4p_x}{2p_y} + \frac{p_x}{p_x + p_y} = \frac{p_y}{2p_x}.$$

Эта система вырождена, она определяет равновесные цены с точностью до постоянного множителя. Если положить $p_x = 1$, то ее решение $p_y \approx 1.74$.

При таких ценах потребление составит:

$$x_1 \approx 0.88, \quad y_1 \approx 0.505; \quad x_2 = y_2 \approx 0.365,$$

производство $y \approx 0.87$ (рис. 34). ♦

П р и м е р 9.2. Экономика 4хHх2: четыре товара, H потребителей и два типа фирм.

Товарами в экономике являются два типа капитала K_j, труд L и единственный потребительский товар C.

Потребители одинаковые, каждый из них владеет v_j единицами капитала j-го типа и одной единицей свободного времени. Функции полезности

$$u(S, W) = \ln S + \ln W,$$

где W – богатство потребителя

$$W = lw + \sum_{j=1}^{2} p_j v_j,$$

S – время досуга

$$S = 1 - l,$$

l – рабочее время, w – заработная плата, p_j – цена j-го типа капитала.

Фирма производит потребительский товар C, используя в качестве факторов производства труд L и капитал K (любого типа), закупаемый у потребителей. Технология производства описывается ПФ Леонтьева

$$F_j(K, L) = \min\{K, a_jL\}, \text{ для капитала типа } j,$$

$$a_1 < a_2.$$

Максимальное количество капитала, которое может приобрести фирма, равно 1. Найти равновесие в этой системе, если рынок потребительского товара конкурентный.

Решение. Величина функции полезности не зависит от остающегося в распоряжении потребителя капитала, следовательно, при ненулевой цене он будет продаваться целиком. Тогда потребитель принимает решение только об объеме предлагаемого труда:

$$l^* = \frac{1}{2w}(w - \sum_{j=1}^{2} p_j v_j).$$

Суммарное предложение труда составит

$$L^S = \sum_{h=1}^{H} l_h^* = \frac{1}{2w}(Hw - \sum_{j=1}^{2} p_j N_j),$$

где $N_j = Hv_j$ – суммарный запас капитала в системе.

Оптимальное решение задач фирм (для капитала обоих типов) имеет вид

$$K_j^* = \begin{cases} 1, & a_j(1-p_j) \ge w \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \qquad L_j^* = \begin{cases} \dfrac{1}{a_j}, & a_j(1-p_j) \ge w \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Тогда спрос фирм на труд составит

$$L^D = \frac{N_1}{a_1} + \frac{N_2}{a_2}.$$

Из условия баланса на рынке труда

$$w = \frac{\sum_j p_j N_j}{H - 2\sum_j \frac{N_j}{a_j}}. \qquad (*)$$

Так как фирмы работают в условиях совершенной конкуренции, то в равновесии на рынке потребительского товара $\Pi_j = 0 \ \forall j$ (это также дает нам возможность не добавлять прибыль фирм к богатству потребителей).

Положим цену потребительского товара $p_c = 1$. Тогда прибыль фирмы в оптимуме

$$П_i^* = 1 - p_i - \frac{w}{a_i} = 0,$$

откуда равновесная цена капитала j-го типа

$$p_i = 1 - \frac{w}{a_i}, \quad j = 1, 2. \qquad (**)$$

Решая систему уравнений (*) и (**), получаем

$$w = \frac{N_1 + N_2}{H - \frac{N_1}{a_1} - \frac{N_2}{a_2}}.$$

Используя это равенство, можно выразить остальные характеристики (цены, объемы выпуска, предложение труда) через параметры системы N_1, N_2, H, a_1, a_2. ♦

Задачи на дом

1. Как изменится решение в примере 9.1, если фирмой будет владеть второй потребитель ? Если каждый владеет ½ фирмы ?

2. В примере 9.2 получить аналитические выражения для цен капитала всех типов, объемов производства и предложения труда через параметры системы N_1, N_2, H, a_1, a_2.

Тема 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

10. Задача оптимального управления

Общей чертой всех рассмотренных выше моделей являлась их *статичность*, то есть предполагалось, что решение о производстве или потреблении принимается один раз, и при этом не учитываются прошлое и будущее агента или фирмы. В реальности, конечно же, решения любого экономического агента связаны не только с текущим его состоянием, но и должны отражать его будущие интересы.

Таким образом, для более адекватного описания поведения агентов в моделях необходимо учитывать *динамические* аспекты, связанные с зависимостью их состояний в разные моменты друг от друга, с долгосрочными целями их существования, с их ожиданиями относительно условий существования в будущем и т.д. Этими вопросами занимаются *динамические модели экономики*, к изучению которых мы и приступаем.

Динамическая модель любой системы отличается тем, что оптимизация решений в ней производится не для единственного момента, а для целого множества (дискретного или непрерывного) этих моментов.

При этом предполагается, что в каждый момент t исследуемый объект характеризуется набором параметров $\mathbf{x}(t) = (x_1(t),\ldots, x_n(t))$, отражающих его состояние в этот момент – *фазовых переменных* или *переменных состояния*. С течением времени фазовые переменные изменяются под действием различных факторов, которые могут быть как подконтрольны нам, так и не подконтрольны. Закон изменения фазовых переменных в зависимости от того, какое множество моментов времени – непрерывное или дискретное – рассматривается, может записываться в виде системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

или разностных

$$\mathbf{x}(t+1) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).$$

Здесь мы в явной форме указали факторы, которые могут нами контролироваться – *переменные управления* $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t)) \in \boldsymbol{U}^t$.

Если мы зададим $\mathbf{u}(t)$ в каждый момент, то знание закона изменения $\mathbf{x}(t)$ позволит нам также определить ее в каждый момент. Пара $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ для любого t определяет *траекторию системы*.

Целью управления рассматриваемой системой является максимизация некоторой функции, которая может зависеть от всей ее траектории

$$J = \sum_{t=0}^{n} F\,(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \text{ (для дискретного времени)},$$

$$J = \int_{t_0}^{T} F\,(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt \text{ (для непрерывного времени)},$$

только от конечного состояния, в которое придет система при заданном управлении

$$J = \Phi(T, \mathbf{x}(T)),$$

или от обеих этих частей

$$J = \int_{t_0}^{T} F\,(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt + \Phi(T, \mathbf{x}(T)) \text{ (для непрерывного времени)}.$$

Кроме того, для системы могут быть заданы некоторые требования на ее начальное состояние (*начальные условия*), и на состояние, в которое она должна попасть в конце рассматриваемого интервала времени – *краевые условия*.

Сформулированная нами задача называется *задачей оптимального управления динамической системой*.

Пример 10.1. Модель потребителя

Имеется потребитель, живущий T периодов. В каждый период он получает некоторый доход Y_t и, кроме того, имеет сбережения A_t. Свои деньги он может потратить на потребление C_t, от которого он получает удовольствие в размере

$$u_t(C_t) = \beta^t u(C_t),$$

где $u(C) = \ln C$ – функция полезности от потребления, $\beta < 1$ – *коэффициент дисконтирования*, показывающий, насколько сильнее ценит потребитель свое текущее потребление по сравнению с будущим.

Кроме того, потребитель может сберечь часть денег для дальнейшего использования, тогда в следующий период на них нарастут проценты по ставке r. Предполагается, что он может занимать деньги в долг (т.е. A_t может быть отрицательным для некоторых t). При этом на долг начисляются проценты исходя из той же ставки r. Также предположим, что к концу жизни он обязан вернуть все долги: $A_T \geq 0$. Каким образом ему следует распределить свой доход, если в начальный момент его сбережения составляют A_0 и он максимизирует совокупную полезность от потребления в течение всей своей жизни ?

Р е ш е н и е . Запишем эту задачу в виде задачи оптимального управления. В каждый момент индивид выбирает свое потребление C_t – это и будет переменная управления. В качестве фазовой координаты возьмем сбережения индивида A_t. В зависимости от получаемого дохода Y_t и выбранного объема потребления C_t сбережения будут изменяться по закону

$$A_{t+1} = (1 + r)A_t - C_t + Y_t,\ \ t = 0, 1, \ldots, T - 1.$$

Объем потребления выбирается таким образом, чтобы максимизировать величину

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln C_t \to \max_{\{C_t\}} .$$

Это задача оптимизации с ограничениями. Составим для нее функцию Лагранжа

$$\Im = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln C_t - \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t (A_{t+1} - (1+r)A_t + C_t - Y_t) + \mu A_T \to \max_{\{C_t, A_t\}} .$$

Условия первого порядка:

$$\frac{\partial \Im}{\partial C_t} = \frac{\beta^t}{C_t} - \lambda_t = 0, \text{ откуда } \frac{1}{C_t} = \beta^{-t} \lambda_t;$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial A_t} = \lambda_t (1+r) - \lambda_{t-1} = 0, \text{ откуда } \lambda_t = (1 + r)^{-t} \lambda_{t-1};$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial A_T} = -\lambda_{T-1} + \mu = 0, \text{ откуда } \lambda_T = \mu \geq 0.$$

Тогда $\lambda_t = (1 + r)^{-t} \lambda_0$, $C_t = C_0 \beta^t (1 + r)^t$.

Таким образом, оптимальное потребление в этой задаче является степенной функцией от времени. В зависимости от соотношения между процентной ставкой r и коэффициентом дисконтирования β потребление может как возрастать, так и убывать с течением времени. Потребление будет постоянным во времени, если

$$\beta = (1 + r)^{-1}.$$

Найдем величину C_0. Решая для полученного потребления C_t систему уравнений для сбережения, можно получить

$$A_T = (1 + r)^T A_0 + \sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{T-t-1} Y_t - C_0 (1 + r)^{T-1} \frac{1-\beta^T}{1-\beta} .$$

К моменту T потребитель должен потратить все свои средства (в противном случае, тратя остаток средств на потребление C_T, потребитель мог бы увеличить свою полезность). В этом случае с учетом ограничения по возврату долгов, $A_T = 0$ и соответствующий множитель функции Лагранжа μ положителен. Тогда из уравнения для A_T получаем

$$C_0 = \frac{1-\beta}{1-\beta^T}\ ((1+r)A_0 + \sum_{t=0}^{T-1}(1+r)^{-t}Y_t\ ).\ ♦$$

П р и м е р 1 0 . 2 . Модель потребителя с непрерывным временем

Теперь рассмотрим задачу, в которой решения о потреблении принимаются непрерывно в течение жизни потребителя, составляющей отрезок времени $[0, T]$. Предположим, что в каждый момент *мгновенная функция полезности* от потребления имеет вид

$$u(C) = C^{\mu}$$

и потребитель максимизирует совокупную дисконтированную полезность

$$\int_0^T e^{-\beta t} C_t^{\mu} dt \to \max.$$

Как и прежде, он выбирает объем потребления C_t в каждый момент, при этом сбережения изменяются по закону

$$A_t = rA_t - C_t + Y_t, \quad t \in [0, T], \qquad (*)$$

$$A(0) = A_0.$$

Вновь будем предполагать, что потребитель может брать в долг, но обязан вернуть его к концу своей жизни. Каким будет оптимальное поведение потребителя в этом случае ?

Р е ш е н и е . Это также задача оптимизации с ограничениями. Отличие заключается в том, что теперь этих ограничений – целый континуум: для каждого $t \in [0, T]$ должно выполняться условие (*).

Выпишем функцию Лагранжа для данной задачи

$$\Im = \int_0^T e^{-\beta t} C_t^{\mu} dt - \int_0^T \psi_t (A_t - rA_t + C_t - Y_t) dt + \lambda A_T \to \max_{\{C_t, A_t\}}.$$

Ее можно преобразовать следующим образом:

$$\Im = \int_0^T e^{-\beta t} C_t^{\mu} dt - \int_0^T \psi_t (A_t - rA_t + C_t - Y_t) dt + \lambda A_T =$$

$$= \int_0^T \left[e^{-\beta t} C_t^{\mu} + \psi_t (rA_t - C_t + Y_t) \right] dt - \int_0^T \psi_t A_t dt + \lambda A_T \,.$$

Второй интеграл можно взять по частям:

$$\int_0^T \psi_t A_t dt = \psi_t A_t \Big|_0^T - \int_0^T \psi_t A_t dt \,.$$

Обозначим $H_t = e^{-\beta t} C_t^{\mu} + \psi_t (rA_t - C_t + Y_t)$.

Тогда функция Лагранжа запишется как

$$\Im = \int_0^T H_t dt - \psi_t A_t \Big|_0^T + \int_0^T \psi_t A_t dt + \lambda A_T \,.$$

Условия оптимума первого порядка:

$$\frac{\partial \Im}{\partial C_t} = \frac{\partial H_t}{\partial C_t} = 0,$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial A_t} = \frac{\partial H_t}{\partial A_t} + \psi_t = 0,$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial A_t} = -\psi_T + \lambda = 0,$$

откуда

$$\psi_t = \mu e^{-\beta t} C_t^{\mu - 1},$$

$$\psi_t = - \psi_t r.$$

Решение дифференциального уравнения для ψ_t имеет вид

$$\psi_t = \psi_T e^{r(T-t)}.$$

Предполагая, что ограничение по возврату долгов выполнено как равенство, получим $\lambda > 0$, тогда из третьего условия следует, что $\psi_T > 0$. Следовательно,

$$C_t^{\mu - 1} = \left(\frac{\psi_T}{\mu} \right) e^{rT + (\beta - r)t},$$

то есть потребление изменяется со временем по экспоненциальному закону. Выражая из этого условия C_0, получим более компактную запись для C_t:

$$C_t = C_0 e^{\frac{\beta - r}{\mu - 1} t} \,.$$

Величина C_0 может быть определена из условия $A_T = 0$, как и в предыдущей задаче.

Решение дифференциального уравнения для A_t имеет вид

$$A_t = e^{rt}\,(A_0 - C_0\int_0^t e^{\frac{\beta-\mu r}{\mu-1}\tau}d\tau + \int_0^t e^{-r\tau}Y_\tau d\tau),$$

откуда

$$C_0 = \frac{\beta-\mu r}{1-\mu}(1-e^{-\frac{\beta-\mu r}{1-\mu}T})^{-1}(A_0 + \int_0^T e^{-r\tau}Y_\tau d\tau). \ \blacklozenge$$

З а д а ч а   н а   д о м. Решить методом Лагранжа

$$\int_0^T \ln(c_t)\,e^{-\beta t}dt + W_T \to \max,$$

$$W_t = rW_t - c_t,\ t \in [0, T],$$

$$W(0) = W_0,$$

на W_T нет никаких ограничений.

11. Динамическое программирование и уравнение Беллмана

Принцип Беллмана дает достаточные условия оптимальности процесса в задаче оптимального управления. Он базируется на следующем ключевом факте:

Если кривая $x^*(t)$ является оптимальной траекторией в задаче управления динамической системой на отрезке времени $[t_0, T]$, с некоторым начальным условием $x(t_0) = x_0$, то для любого момента $\tau \in [t_0, T]$ оптимальным решением задачи управления системой на отрезке времени $[\tau, T]$ с начальным условием $x(\tau) = x^*(\tau)$ будет являться участок той же самой траектории $x^*(t)$ (рис.35).

Рассмотрим задачу оптимального управления в виде:

$$J = \int_{t_0}^T F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\,dt + \Phi(T, \mathbf{x}(T)),$$

$$x(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U_t,$$

и пусть J^* – значение функционала задачи на оптимальном решении $(x^*(t), u^*(t))$.

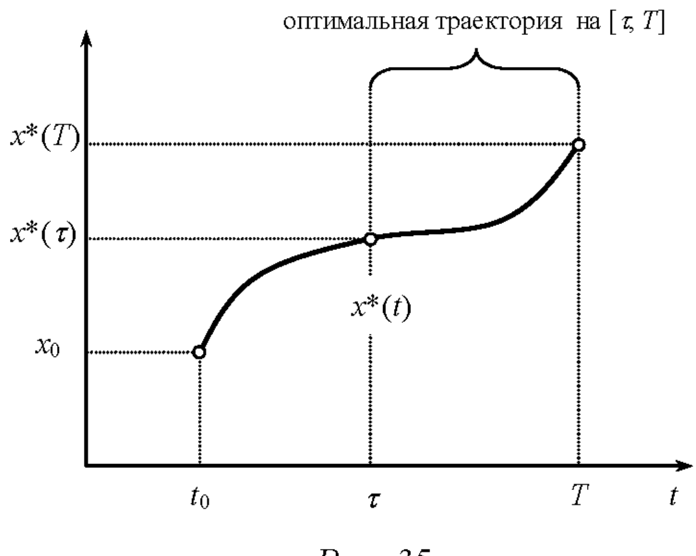


Рис. 35

Теперь для произвольного момента $\tau \in [t_0, T]$ и произвольной точки фазового пространства y положим в рассматриваемой задаче $t_0 = \tau$, $x(\tau) = y$. Функцию $J^*(\tau, y)$, равную значению функционала на оптимальном решении такой задачи, будем называть *функцией Беллмана*, или *функцией выигрыша*. Отметим, что $J^* = J^*(t_0, x_0)$.

Исследуем теперь изменение функции $J^*(t, x)$ с течением времени вдоль оптимальной траектории системы, то есть при $x = x^*(t)$. Рассмотрим малое приращение времени dt. За это время система перейдет в новое состояние

$$x^*(t + dt) \approx x^*(t) + dx^*(t),$$

где

$$dx^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t))dt.$$

Изменение значения функционала на отрезке $[t, t + dt]$. может происходить только за счет его интегральной части и приближенно составляет

$$\int_t^{t+dt} F(t, x^*(t), u^*(t))dt \approx F(t, x^*(t), u^*(t))dt,$$

а оставшаяся часть, согласно принципу оптимальности Беллмана, будет равна $J^*(t + dt, x^*(t + dt))$. Таким образом, получено следующее рекуррентное соотношение:

$$J^*(t, x^*(t)) \approx F(t, x^*(t), u^*(t))dt + J^*(t + dt, x^*(t + dt)).$$

Теперь, пользуясь оптимальностью $u^*(t)$, можем переписать это соотношение следующим образом:

$$J^*(t, x(t)) \approx \max_{u(t)\in U_t} \{F(t, x(t), u(t))dt + J^*(t + dt, x(t + dt))\}.$$

Далее, в предположении дифференцируемости $J^*(t, x)$ по своим аргументам, переходя к пределу при $dt \to 0$ и учитывая дифференциальную связь, получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial J^*(t,x)}{\partial t} = \max_{u(t)\in U_t} \{F(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial J^*(t,x)}{\partial x} f(t, x(t), u(t))\}.$$

Оно представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для определения функции $J^*(t, x)$. Оно называется *уравнением Беллмана в дифференциальной форме*.

Краевым условием для данного уравнения является оптимальное значение функционала при $t = t_1$, равное терминальному члену:

$$J^*(t_1, x(t_1)) = \Phi_0(t_1, x(t_1)).$$

Как правило, аналитическое решение уравнения Беллмана найти довольно сложно или вовсе невозможно. Поэтому прибегают к дискретизации задачи с последующим ее численным решением. Дискретная задача формулируется следующим образом:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \sum_{i=0}^{N-1} F(t_i, x_i, u_i)\Delta t_i + \Phi_0(x_N) \to \max.$$

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i), \quad x_0 - \text{задано}.$$

$$u_i \in U_i,$$

Отметим, что в дискретной задаче состояние системы будет описываться вектором $x = (x_0, x_1,\ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, а управление – вектором $u = (u_0, u_1,\ldots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$.

Уравнение Беллмана для данной задачи будет иметь вид

$$J_i^*(x_i) = \max_{u_i \in U_i} \{F(t_i, x_i, u_i)\Delta t_i + J_{i+1}^*(f(x_i, u_i))\}$$

с краевым условием

$$J_N^*(x_N) = \Phi_0(x_N).$$

Решение данной задачи при заданных краевых условиях производится последовательным решением уравнения Беллмана для шагов $i = N–1, N–2, \ldots, 0$ (обратный ход метода Беллмана). При этом на каждом шаге получается оптимальное управление u_i^* как функция от текущего состояния системы x_i.

На втором этапе по полученным функциям $u_i^*(x_i)$ производится *синтез оптимального управления* для задачи с конкретным начальным условием x_0.

Таким образом, метод динамического программирования позволяет определять оптимальное управление как функцию состояния системы $u^*(t, x)$ (*синтезированное управление*), что дает возможность отыскивать решение сразу для целого класса задач с различными начальными условиями.

Далее будем считать, что в функционал задачи время не входит явно. Положим шаг Δt_i равным 1. Введем понятие *горизонта планирования* как количества шагов, оставшихся до завершения управления. Обозначим

$$V_k(x) = J_{N-k}^*(x),$$

то есть максимальный выигрыш, который можно получить за k шагов, если начать из состояния x. В этом случае рекуррентное соотношение для $V_k(x)$ принимает вид:

$$V_k(x) = \max_{u \in U} \{F(x, u) + V_{k-1}(f(x, u))\}$$

с краевым условием: $V_0(x) = \Phi_0(x)$.

П р и м е р 11.1. З а д а ч а р а с п р е д е л е н и я р е с у р с а

Имеется некоторый ресурс в объеме $a > 0$, который необходимо распределить между N агентами так, чтобы максимизировать их суммарную полезность, если функция полезности i-го агента

$$F_i(u_i) = \ln u_i,$$

где u_i – объем ресурса, получаемый i-м агентом. (Считаем, что агенты как-то перенумерованы.)

Р е ш е н и е . В формальной постановке задача имеет вид

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \ln u_i \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \le a; \quad a > 0.$$

Приведем ее к задаче оптимального управления. Для этого необходимо выделить переменную, являющуюся аналогом времени (номера шага) в задаче оптимального управления, горизонта планирования, а также параметры состояния и управления в каждый момент.

Пусть номером шага в задаче является номер агента i, для которого принимается решение о распределении ресурса. Тогда величина u_i будет являться управлением на i-м шаге. Введем параметр состояния системы x_i как объем ресурса, имеющийся к i-му шагу ($i = \overline{1, N}$). Тогда из условия задачи получаем

$$x_{i+1} = x_i - u_i; \qquad x_1 = a.$$

Так как может быть распределено ресурса не более, чем есть в наличии, то имеет место ограничение на управление

$$0 \le u_i \le x_i.$$

Мы получили задачу оптимального управления в дискретном времени. Решим ее с использованием принципа Беллмана. Обозначим через $V_k(x)$ значение функции выигрыша, когда горизонт планирования равен k, то есть ресурс x распределяется между k агентами (неважно, что последними, так как все агенты имеют одинаковые функции полезности).

Рассмотрим последний шаг в нашей задаче, который имеет место после того, как ресурс полностью распределен между всеми агентами. Согласно краевому условию функция Беллмана V_0 на этом шаге равна

$$V_0(x) = \Phi_0(x) \equiv 0.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда ресурс должен быть распределен одному агенту. В этом случае горизонт планирования $k = 1$ и рекуррентное соотношение принимают вид

$$V_1(x) = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + V_0(x - u)\} = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u \} = \ln x ,$$

откуда $u_N^*(x) = x$.

Аналогично, при горизонте планирования $k = 2$ имеем

$$V_2(x) = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + V_1(x - u)\} = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + \ln(x - u)\}.$$

Максимум выражения в фигурных скобках по $u \in [0, x]$ достигается при $u^*(x) = \frac{x}{2}$, при этом $V_2(x) = 2 \ln\frac{x}{2}$. Значит, оптимальное управление в этой ситуации $u_{N-1}^*(x) = \frac{x}{2}$.

Покажем далее, что для горизонта $k = 0,\ldots, N$ оптимальное управление на шаге $(N + 1 - k)$ и функция Беллмана горизонта k имеют вид

$$u_{N+1-k}^*(x) = \frac{x}{k}, \qquad V_k(x) = k \ln\frac{x}{k}.$$

Предположим, что это верно на некотором шаге $(N + 1 - k)$. Определим оптимальное управление и функцию Беллмана горизонта k

$$V_{k+1}(x) = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + V_k(x - u)\} = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + k \ln \frac{x - u}{k} \}.$$

Обозначим

$$A(u) = \ln u + k \ln \frac{x - u}{k}.$$

Условия первого порядка максимума функции $A(u_{N-k})$ имеют вид

$$\frac{dA}{du} = \frac{1}{u} - \frac{k}{x - u} = 0,$$

откуда

$$u_{N-k}^*(x) = \frac{x}{k + 1}, \quad V_{k+1}(x) = (k + 1) \ln\frac{x}{k + 1}.$$

Таким образом, определен общий вид оптимального управления для произвольного шага в задаче. Теперь проведем синтез оптимального управления для задачи с N агентами и начальным объемом ресурса, равным a:

$$u_1^*(x_1) = \frac{x_1}{N} = \frac{a}{N}; \quad x_2 = x_1 - u_1^* = a - \frac{a}{N} = \frac{a(N - 1)}{N};$$

$$u_2^*(x_2) = \frac{x_2}{N - 1} = \frac{a}{N}; \quad x_3 = x_2 - u_2^* = \frac{a(N - 1)}{N} - \frac{a}{N} = \frac{a(N - 2)}{N};$$

…

$u_k^*(x_k) = \dfrac{x_k}{N+1-k} = \dfrac{a}{N}$; $\quad x_{k+1} = x_k - u_k^* = \dfrac{a(N+1-k)}{N} - \dfrac{a}{N} = \dfrac{a(N-k)}{N}$;

…

Следовательно, в данной задаче оптимальным является равномерное распределение ресурса между агентами:

$$u^* = \left(\frac{a}{N}, \frac{a}{N}, \ldots, \frac{a}{N}\right). \ \blacklozenge$$

П р и м е р 1 1 . 2 . М о д е л ь Р а м с е я в д и с к р е т н о м в р е м е н и

Найти оптимальное потребление c_t, максимизирующее функцию полезности агента за T периодов с учетом дисконтирования:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t U(c_t) \to \max_{0 \le c_t \le s_t};$$

$$s_{t+1} = \rho(s_t - c_t), \quad s_0 - \text{задано}, \quad \rho > 1; \quad 0 < \beta < 1,$$

если $U(c_t) = c_t^{1-\mu}$, $\quad 0 < \mu < 1$.

Определить предельную оптимальную траекторию при $T \to \infty$ (если она есть).

Р е ш е н и е. Для данной задачи рекуррентное соотношение для $V_k(x)$ примет вид

$$V_l(s) = \max_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta V_{l-1}(\rho(s-c))\}.$$

Вычислим $V_1(s)$, $V_2(s)$, $V_3(s)$ и определим общий вид $V_l(s)$:

$V_0 = \Phi_0(s_T) \equiv 0$,

$V_1(s) = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta V_0(\rho(s-c))\} = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu}\} = s^{1-\mu}$, $\quad c_{T-1}(s) = s$,

$V_2(s) = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta V_1(\rho(s-c))\} = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta(\rho(s-c))^{1-\mu}\}$.

Обозначим $A_2(c) = c^{1-\mu} + \beta(\rho(s-c))^{1-\mu}$, и определим c, доставляющее максимум $A_2(c)$:

$\dfrac{dA_2}{dc} = (1-\mu)c^{-\mu} - \beta(1-\mu)\rho^{1-\mu}(s-c)^{-\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad c^* = \dfrac{ds}{1+d}$, где $d = (\beta\rho^{1-\mu})^{1/\mu}$.

Таким образом:

$$V_2(s) = (1+d)^{\mu} s^{1-\mu}, \quad c_{T-2}(s) = \frac{ds}{1+d}.$$

Далее,

$V_3(s) = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta V_2(\rho(s-c))\} = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta(1+d)^{\mu}(\rho(s-c))^{1-\mu}\}$.

Обозначим $A_3(c) = c^{1-\mu} + \beta(1 + d)^{\mu}(\rho(s - c))^{1-\mu}$. Условие максимума $A_3(c)$ имеет вид

$$\frac{dA_3}{dc} = (1 - \mu)c^{-\mu} - (1 - \mu)(1 + d)^{\mu} d^{\mu} (s - c)^{-\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad c^* = \frac{s}{1 + d + d^2}.$$

Тогда

$$V_3(s) = (1 + d + d^2)^{\mu} s^{1-\mu}, \quad c_{T-3}(s) = \frac{s}{1 + d + d^2}.$$

Проверим, что для произвольного шага n выполнено

$$V_n(s) = s^{1-\mu} (\sum_{k=0}^{n} d^k)^{\mu}, \quad c_{T-n}(s) = \frac{s}{\sum_{k=0}^{n-1} d^k}. \qquad (*)$$

Допустим, что (*) выполнено для некоторого n. Определим вид $V_{n+1}(s)$ и $c_{T-n-1}(s)$:

$$V_{n+1}(s) = \max_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta V_n(\rho(s - c))\} = \max_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta(\rho(s - c))^{1-\mu}(\sum_{k=0}^{n} d^k)^{\mu}\}.$$

Выписывая аналогично предыдущим рассуждениям условия экстремума первого порядка для функции $A_{n+1}(c)$, получим

$$c^* = \frac{s}{\sum_{k=0}^{n} d^k}.$$

Тогда

$$V_{n+1}(s) = s^{1-\mu} (\sum_{k=0}^{n+1} d^k)^{\mu}, \quad c_{T-n}(s) = \frac{s}{\sum_{k=0}^{n} d^k},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, оптимальное управление в данной задаче будет иметь вид

$$c_t^*(s) = \frac{s}{\sum_{k=0}^{T-t-1} d^k}.$$

Тогда оптимальная траектория системы s_t^* (объем сбережений при оптимальном потреблении) определяется рекуррентно из соотношения

$$s_{t+1}^* = \rho(s_t^* - c_t^*(s_t^*)) = \rho(s_t^* - \frac{s_t^*}{\sum_{k=0}^{T-t-1} d^k}) = \rho d \frac{\sum_{k=0}^{T-t-2} d^k}{\sum_{k=0}^{T-t-1} d^k} s_t^*, \quad s_0^* = s_0.$$

Определим теперь предельную оптимальную траекторию при $T \to \infty$. Видно, что функция $V_n(s)$ имеет конечный предел при $n \to \infty$, только если $d < 1$:

$$V(s) = \lim_{n\to\infty} V_n(s) = \lim_{n\to\infty} s^{1-\mu} (\sum_{k=0}^{n} d^k)^{\mu} = \frac{s^{1-\mu}}{(1-d)^{\mu}}.$$

При этом

$$c(s) = \lim_{n\to\infty} c_n{}^*(s) = (1-d)s.$$

Управление $c(s)$ по определению полагается решением задачи с бесконечным горизонтом планирования

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^{1-\mu} \to \max_{0\le c\le s};$$

$$s_{t+1} = \rho(s_t - c_t), \quad s_0 - \text{задано.} \blacklozenge$$

П р и м е р 11.3. З а д а ч а о р а н ц е

Имеется контейнер емкостью V и грузоподъемностью M и N типов изделий, для каждого из которых известны стоимость c_i, вес m_i и объем v_i. Требуется разместить в контейнере набор изделий максимальной суммарной стоимости.

Р е ш е н и е. Обозначим через x_i количество предметов i-го типа, размещенных в контейнере. Тогда задача будет иметь вид

$$L(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \le M, \qquad \sum_{i=1}^{N} v_i x_i \le V,$$

$$x_i \in \mathrm{N},\ i = 1,\ldots,N.$$

Сведем ее к дискретной задаче оптимального управления. Пусть "шагом" операции является номер класса изделий, которые складываются в контейнер. Определим две переменные состояния: μ_i – оставшаяся грузоподъемность после распределения изделий i-го класса и γ_i – свободный объем после распределения изделий i-го класса. Тогда с каждым шагом состояние системы будет изменяться по следующему закону:

$$\mu_{i+1} = \mu_i - m_{i+1} x_{i+1}, \quad \mu_0 = M,$$

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i - v_{i+1} x_{i+1}, \quad \gamma_0 = V.$$

Очевидно, управлением в данной задаче является количество изделий x_i, помещаемых в ранец на каждом шаге. Функция Беллмана $J_l(\mu, \gamma)$ в данной задаче будет представлять собой максимальную стоимость набора, состоящего из изделий классов $i \ge l$, помещенных в контейнер:

$$J_l(\mu, \gamma) = \max_{x_l} \{c_l x_l + J_{l+1}(\mu - m_l x_l, \gamma - v_l x_l)\}, \quad m_l x_l \le \mu, \quad v_l x_l \le \gamma.$$

Так как управление x_l является дискретным, то функцию Беллмана удобно представлять в виде таблицы, с дискретизацией, соответствующей минимальным изменениям объема и грузоподъемности контейнера при помещении в него изделий.

В качестве примера рассмотрим случай $M = 7$, $V = 7$, $N = 3$, со следующими параметрами изделий:

Класс, i	Стоимость, c_i	Масса, m_i	Объем, v_i
1	4	3	1
2	5	2	3
3	1	1	3

В этом случае исходная задача целочисленного программирования запишется как

$$L(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7,$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 7,$$
$$x_i \in \mathbb{N}, \; i = 1,\ldots, N.$$

Множество допустимых состояний системы на каждом шаге представляет собой пары (μ, γ), где $\mu, \gamma \in \{0, 1, \ldots, 7\}$.

Функция Беллмана для шага 3 имеет вид

$$J_3(\mu, \gamma) = \max_{x_3} \{ x_3\}, \quad x_3 \le \mu, \quad 3x_3 \le \gamma, \quad x_3 \in \mathrm{N}.$$

Ее значения для допустимых состояний приведены в таблице:

$\mu \setminus \gamma$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	0	1	1	1	2	2
3	0	0	0	1	1	1	2	2
4	0	0	0	1	1	1	2	2
5	0	0	0	1	1	1	2	2
6	0	0	0	1	1	1	2	2
7	0	0	0	1	1	1	2	2

На шаге 2 функция Беллмана имеет вид

$$J_2(\mu,\gamma)=\max_{x_2}\{5x_2+J_3(\mu-2x_2,\gamma-3x_2)\},\quad 2x_2\le\mu,\quad 3x_2\le\gamma,\quad x_2\in\mathrm{N}.$$

Таблица значений $J_2(\mu, \gamma)$ строится с использованием уже полученной таблицы для $J_3(\mu, \gamma)$:

$\mu\backslash\gamma$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	0	5	5	5	5	5
3	0	0	0	5	5	5	6	6
4	0	0	0	5	5	5	$\boxed{10}$	10
5	0	0	0	5	5	5	10	10
6	0	0	0	5	5	5	10	10
7	0	0	0	5	5	5	10	10

На шаге 1 функция Беллмана имеет вид

$$J_1(\mu,\gamma)=\max_{x_1}\{4x_1+J_2(\mu-3x_1,\gamma-x_1)\},\quad 3x_1\le\mu,\quad x_1\le\gamma,\quad x_1\in\mathrm{N}.$$

Таблица значений $J_1(\mu, \gamma)$ выглядит следующим образом:

$\mu\backslash\gamma$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	0	5	5	5	5	5
3	0	4	4	5	5	5	6	6
4	0	4	4	5	5	5	10	10
5	0	4	4	5	9	9	10	10
6	0	4	8	8	9	9	10	10
7	0	4	8	8	9	9	10	$\boxed{14}$

Максимальная стоимость набора изделий соответствует значению $J_1(7, 7)$, а сам набор – оптимальным значениям компонент управления (x_1, x_2, x_3), на которых достигаются значения функций J_1, J_2 и J_3: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. ◆

З а д а ч и   н а   д о м

1. Дана модель Рамсея в дискретном времени с конечным горизонтом:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \ln c_t \to \max_{0 \le c_t \le s_t};$$

$$s_{t+1} = \rho(s_t - c_t), \quad s_0 - \text{задано}, \quad \rho > 1; \quad 0 < \beta < 1.$$

Выписать для данной модели рекуррентное соотношение Беллмана, найти общий вид функций выигрыша $V_k(s)$, $k = 1, 2, \ldots$ и оптимальных стратегий потребления $c_k(s)$.

2. В задаче

$$\sum_{i=0}^{n-1} \beta^i c_i^p \to \max_{c_i \ge 0}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} c_i \le s, \quad p > 1, \quad \beta > 0,$$

получить рекуррентное соотношение Беллмана для функций V_n. Исходя из него получить рекуррентное соотношение для постоянных коэффициентов в выражении для V_n. Описать характер оптимальной стратегии потребления c_i в зависимости от параметра β. Получить выражение для V_n непосредственно.

3. Найти оптимальное решение задачи о ранце при $M = 8$, $V = 6$, $N = 3$:

Класс, i	Стоимость, c_i	Масса, m_i	Объем, v_i
1	3	3	2
2	2	2	1
3	1	1	3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. *Динамическое программирование.* – М.: ИЛ, 1960.
2. Гранберг А.Г. *Динамические модели народного хозяйства.* - М.: Экономика, 1985.
3. Иванов Ю.Н., Токарев В.В., Уздемир А.П. *Математическое описание элементов экономики.* – М.: Физ.-мат. литература, 1994.
4. Карлин С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике.* – М.: Мир, 1964.
5. *Курс экономической теории* / Под ред. М.Н.Чепурина, Е.А.Киселевой – Киров: "АСА", 1995.
6. Ланкастер К. *Математическая экономика.* – М.: Советское радио, 1972.
7. Лотов А.В. *Введение в экономико-математическое моделирование.* – М.: Наука, 1984.
8. Макконнел К.Р., Брю С.Л. *Экономикс: принципы, проблемы и политика*: В 2 т. – М.: Республика, 1992.
9. *Моделирование народнохозяйственных процессов.* - Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
10. Мулен Э. *Теория игр с примерами из математической экономики.* – М.: Мир, 1985.
11. Петров А.А. *Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент.* – М.: Наука, 1996.
12. Пиндайк Р.С., Рубинфельд Д.Л. *Микроэкономика.* – М.: Дело, 2000.
13. *Теория выбора и принятия решений. Учеб. пособие* / И.М.Макаров и др. – М.: Наука, 1982.
14. Тироль Ж. *Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности*: В 2 т. – СПб.: Экономическая школа, 2000.
15. Хей Д., Моррис Д. *Теория организации промышленности*: В 2 т. – СПб.: Экономическая школа, 1999.